Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Российский фонд фундаментальных исследований
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Математический Фонд Крыма

Международная конференция

КРОМШ-2016

XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Батилиман (Ласпи), Российская Федерация, 17 – 29 сентября

2016

УДК 517.9:519.2
ББК 22.16: 22.17:22.19:22.25:74.262.21
М 43

Международная конференция “XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам” (КРОМШ-2016): сборник тезисов. – Симферополь: ООО ФОРМА, 2016. - 132 с.

Конференция проводится при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 16-01-20545 Г).

Секция 1. Общая теория операторов

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ, ИХ ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ И АВТОМОРФИЗМЫ

Антоневич А.Б., Глаз А.Н.

Белорусский государственный университет(Беларусь, Минск)

E-mail: antonevich@bsu.by, anna-glaz@yandex.ru

Пространство максимальных идеалов почти-периодической алгебры. Пусть $CB(\mathbb{R}^m)$ есть пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^m$ с sup-нормой. Множество $CAP(\mathbb{R}^m)$ непрерывных почти-периодических функций может быть определено как наименьшая замкнутая подалгебра в $CB(\mathbb{R}^m)$, содержащая все экспоненты – функции вида

$$e^{i2\pi<h,x>},\quad \text{где}\quad x\in\mathbb{R}^m, h\in\mathbb{R}^m,\quad <h_j,x>-\ \text{скалярное произведение.}$$

У алгебры $CAP(\mathbb{R}^m)$ существует много C^*-подалгебр (т.е. замкнутых и симметричных). С каждой такой алгеброй $\mathcal{A}$ связана группа частот $H(\mathcal{A})\subset\mathbb{R}^m$, состоящая из тех h, при которых $e^{i2\pi<h,x>}\in\mathcal{A}$.

Согласно теореме Гельфанда - Наймарка, алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$, состоящей из всех непрерывных функций на компактном пространстве $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, которое называется *пространством максимальных идеалов* алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть G есть коммутативная локально компактная группа. *Характером группы* G называется гомоморфизм $f:G\to\mathbb{S}^1\subset\mathbb{C}$ в группу комплексных числе с модулем 1. Множество характеров образует *двойственную группу* $\widehat{G}$, которая также является локально компактной в соответствующей топологии. Согласно теории двойственности Понтрягина, если исходная группа дискретна, то двойственная к ней является компактной.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ есть C^*-подалгебра в $CAP(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\widehat{H(\mathcal{A})}$, т.е. пространство максимальных идеалов алгебры есть двойственная группа к группе частот.*

Автоморфизмы квазипериодических алгебр. Подалгебра $\mathcal{A}$ в $CAP(\mathbb{R}^m)$ называется *квазипериодической*, если она порождена конечным числом N экспонент $e^{i2\pi<h_j,x>}$. Группа частот $H(\mathcal{A})$ такой алгебры есть $\mathbb{Z}^N$, а пространство максимальных идеалов есть N-мерный тор $\mathbb{T}^N$.

Квазипериодические алгебры представляют особый интерес в связи с многочисленными приложениями [1]. В частности, при исследовании квазикристаллов один из основных вопросов заключается в описании афинных отображений $\alpha(x)=Qx+b$ пространства $\mathbb{R}^m$, порождающих автоморфизмы рассматриваемой квазипериодической алгебры [1, 2].

Теорема 2. *Афинное отображение $\alpha(x)=Qx+b$ задает автоморфизм некоторой квазипериодической алгебры тогда и только тогда, когда матрица Q является алгебраической единицей – существует полином с целыми коэффициентами*

$$p(t)=\sum_0^n a_k t^k,$$

у которого $a_n=1, a_0=\pm1$, такой, что $P(Q)=0$.

Список литературы

[1] Дынников И. А. Новиков С. П. *Топология квазипериодических функций на плоскости* // Успехи математических наук, 2005, т. 60. вып. 1(361)/Ċ. 3-28.

[2] Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А. Садов В. А. *Геометрия квазикристаллов* // Успехи математических наук, 1993, т. 48. вып. 1(289). С. 41-102.

J-ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ И J-УНИТАРНАЯ ДИЛАТАЦИИ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА

Биданец А. В., Кудряшов Ю. Л.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского (Симферополь, Российская Федерация)

E-mail: alexander.bidanets@yandex.ru

Определение 1. Совокупность гильбертовых пространств H, H_- и H_+ и операторов $T \in [H,H], \Psi \in [H,H_+], \Phi \in [H_-,H], K \in [H_-,H_+], J_- \in [H_-,H_-], J_+ \in [H_+,H_+]$, $J_- = J_-^* = J_-^{-1}$, $J_+ = J_+^* = J_+^{-1}$ называется унитарным метрическим узлом [6] $\Delta = \left(J_-, H\oplus H_-, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}, H\oplus H_+, J_+\right)$, если выполняются соотношения:

$$T^*T + \Psi^*J_+\Psi = I \tag{1}$$

$$T^*\Phi + \Psi^*J_+K = 0 \qquad (\Phi^*T + K^*J_+\Psi = 0) \tag{2}$$

$$\Phi^*\Phi + K^*J_+K = J_- \tag{3}$$

$$TT^* + \Phi J_-\Phi^* = I \tag{4}$$

$$T\Psi + \Psi J_-K^* = 0 \qquad (\Psi T^* + KJ_-\Phi^* = 0) \tag{5}$$

$$\Psi\Psi^* + KJ_-K^* = J_+ \tag{6}$$

Пусть оператор $T \in [H,H]$ включен в узел Δ. Образуем гильбертово пространство $\mathfrak{H}$.

Введем в пространстве $\mathfrak{H}$ J-метрику с помощью оператора J: $J\left(h_0,h_1,h_2,...\right) = \left(h_0, J_+h_1, J_+h_2,...\right)$. Пусть V: $Vh = V\left(h_0,h_1,h_2,...\right) = \left(Th_0, \Psi h_1, h_2,...\right)$.

Теорема 1. *Оператор V является J-изометрической дилатацией оператора T (и, следовательно, узла Δ).*

Определение 2. J-изометрическая дилатация $V \in [\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ оператора $T \in [H,H]$ называется минимальной, если $\mathfrak{H} = \overline{span\left\{V^nH \mid n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\right\}}$

Теорема 2. *J-изометрическая дилатация V является минимальной, если $H_+ = \overline{\Psi H}$.*

Теорема 3. *Минимальная J-изометрическая дилатация оператора T определена с точностью до J-унитарного изоморфизма.*

Пусть $T \in [H,H]$ и T включен в узел Δ. Образуем гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Пусть U:

$$Uh = \left(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + \Phi h_{-1}}, \Psi h_0 + Kh_{-1}, h_1, \ldots\right).$$

Теорема 4. *Оператор U является J-унитарной дилатацией узла Δ.*

Определение 3. J-унитарная дилатация $U \in [\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ оператора $T \in [H,H]$ называется минимальной, если $\mathfrak{H} = \overline{span\left\{U^nH \mid n \in \mathbb{Z}\right\}}$, где $U^{-1} = JU^*J$.

Теорема 5. *Если $H_+ = \overline{\Psi H}$, $H_- = \overline{J_-\Phi^*H}$, то J-унитарная дилатация U является минимальной.*

Теорема 6. *Минимальная J-унитарная дилатация оператора $T \in [H,H]$ определена с точностью до J-унитарного изоморфизма.*

Список литературы

[1] Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Москва: Мир (1970), 432.
[2] Рисс Ф., Сёкефальви- Надь Б., *Лекции по функциональному анализу*, Москва: Мир (1979), 592.
[3] Davis Ch., *J-unitary dilation of a general operators*, Mathematical Problems of Cybernetics, Acta Sci. Math. (Szeged) 31, № 1–2 (1970), 75–86.
[4] Кужель А. В., *Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов*, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Вып. 37 (1982), 54-62.
[5] Temme D., *The point spectrum of unitary dilations in krein spaces*, Mathematische Nachriehten (1995), 1–20.
[6] Золотарев В. А., *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*, Харьков: ХНУ (2003), 342.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Векслер А.С.

Институт Математики при Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека (Узбекистан, Ташкент)

E-mail: aleksandr.veksler@micros.uz

Пусть (S, Σ, μ) — пространство Лебега конечной непрерывной меры. Банахово пространство $(X, \|\ \ \|_X)$ действительных измеримых функций, заданных на S (равные почти всюду функции отождествляются), называется *симметричным пространством* (СП), если предположение равноизмеримости функций f_1 и f_2, $f_2 \in X$, влечет $f_1 \in X$ и $\|f_1\|_X = \|f_2\|_X$, а из $|f_1| \leqslant |f_2|$ и $f_2 \in X$ вытекает, что $f_1 \in X$ и $\|f_1\|_X \leqslant \|f_2\|_X$ (см., например, [1]).

Пусть T — сохраняющий меру автоморфизм в S, $U_T f(s) = f(Ts)$, $f \in X$, $S_n^T = n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} U_T^i$. Следующие результаты анонсированы в [2, 3] и доказаны в [4].

Теорема 1 (СЭТ в сепарабельных СП). *Если X — сепарабельное симметричное пространство на пространстве Лебега конечной непрерывной меры, тогда средние S_n^T сходятся в X в сильной операторной топологии.*

Поскольку мера μ в пространстве Лебега является сепарабельной, то, в случае $X \neq L_\infty$, замыкание X_0 пространства L_∞ в $(X, \|\ \ \|_X)$ является сепарабельным симметричным пространством [1]. В соответствии с теоремой 1, средние $\left\{S_n^T f\right\}$ сходятся в X для каждого элемента $f \in X_0$.

Теорема 2. *(СЭТ в несепарабельных СП) Пусть X — несепарабельное СП на пространстве Лебега конечной непрерывной меры и $X \neq L_\infty$. Тогда средние $\left\{S_n^T\right\}$ сходятся в X в сильной операторной топологии в том и только в том случае, когда автоморфизм T периодичен.*

Более того, если T не периодичен, то для каждой функции $f \in X \setminus X_0$ найдётся такая равноизмеримая с ней функция $\hat{f}$, что средние $\left\{S_n^T \hat{f}\right\}$ не сходятся в X.

Пусть теперь X — несепарабельное СП на отрезке $S = [0, 1]$ и $X \neq L_\infty$. Через D_n обозначим оператор растяжения измеримой функции $f(t)$ на S:

$$D_n f(t) \stackrel{def}{=} f(t/n) = \begin{cases} f(t/n), & \text{если} \quad t \in [0,1]; \\ 0, & \text{если} \quad t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Если $f \geqslant 0$ — измеримая невозрастающая функция, то верно неравенство $\rho(D_m f, X_0) \leqslant \rho(D_n f, X_0)$, если $m \leqslant n$, где $\rho(f, X_0)$ — расстояние от элемента $f \in X$ до X_0.

Для каждой измеримой функции f, заданной на S, через $f^*(t)$ обозначим ее убывающую перестановку f, $t \in [0, \mu S]$ [1].

Определение 1. Будем говорить, что элемент $f \in X$ удовлетворяет:
условию (DWI) — Distance Weak Increase, если $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-1} \rho(D_n f^*, X_0) = 0$;

условию (DBI) — Distance Bounded Increase, если последовательность $\rho(D_n f^*, X_0)$ ограничена.

Будем говорить, что СП X удовлетворяет условию (DWI) (соответственно, (DBI)), если каждый элемент $f \in X$ удовлетворяет условию (DWI) (соответственно, (DBI)).

Отметим, что условие (DBI) влечет условие (DWI). Следующие предложение выделяет классы симметричных пространств, удовлетворяющих и не удовлетворяющих условиям (DBI) и (DWI).

Предложение 1. (i). *Каждое пространство Орлича L_M удовлетворяет условиям (DBI) и (DWI);*
(ii). *Существует пространство Марцинкевича M_ψ, не удовлетворяющее условию (DWI), следовательно и (DBI).*

Следующая теорема существенно дополняет указанную выше теорему 2.

Теорема 3. *Пусть X — несепарабельное СП на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега и $X \neq L_\infty$. Если X удовлетворяет условию (DWI) и автоморфизм T не периодичен, то для каждой функции $0 \leqslant f \in X \setminus X_0$ существует такая равноизмеримая с ней функция $\tilde{f}$, что средние $S_n^T \tilde{f}$ сходятся в X.*

Список литературы

[1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Б. М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978, 400с.

[2] Векслер А. С. Эргодическая теорема в симметричных пространствах. — Сиб.мат.журн., т. **26**, № 4 (1985), с. 189–191.

[3] Векслер А. С., Фёдоров А. Л. Статистическая эргодическая теорема в несепарабельных симметричных пространствах функций. — Сиб. мат. журн., т. **29**, № 3 (1988), с. 183–185.

[4] Векслер А. С., Фёдоров А. Л. Симметричные пространства и статистические эргодические теоремы для автоморфизмов и потоков. — Ташкент: ФАН, 2016., 168с.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ РАДЕМАХЕРА L_2-ФУНКЦИЙ

Зотиков С.В.

КИИПТ (Россия, Симферополь)

E-mail: sergey.zotikov@yandex.ru

В докладе рассматривается введённый в работе [1] класс ортонормированных систем функций (о.н.с.) типа Радемахера, содержащий в себе классическую систему Радемахера. Каждая система этого класса определяется заданной последовательностью натуральных чисел, отличных от единицы.

На основе конструкции скрещенного произведения двух о.н.с. определяются континуальные аналоги систем типа Радемахера и вводятся понятия преобразований и интегралов Фурье-Радемахера и интегралов Радемахера функций, интегрируемых в квадрате на правой числовой полуоси.

Далее изучаются свойства интегралов Радемахера функций из рассматриваемого пространства. Так, используя континуальный аналог теоремы Меньшова-Радемахера, устанавливаются условия сходимости почти всюду интеграла Радемахера данной функции. Затем находятся условия сходимости почти всюду интегралов Радемахера функций из пересечения рассматриваемого пространства и пространства интегрируемых функций.

Особо рассматривается ситуация, когда второй компонентой скрещенного произведения, определяющего континуальный аналог системы типа Радемахера, является полная о.н.с.. В этом случае также найдены условия сходимости почти всюду интегралов Радемахера L_2 - функций.

Все условия сходимости почти всюду интегралов Радемахера формулируются в терминах требований, предъявляемых к рассматриваемым функциям и к компонентам скрещенных произведений, определяющих континуальные аналоги систем типа Радемахера.

Список литературы

[1] Зотиков С.В. *О классе систем типа Радемахера* // Казань: Известия ВУЗов. Математика, 1976, № 7. – С. 30 - 43.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ J-САМОСОПРЯЖЁННОЙ ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Кудряшов Ю.Л., Третьяков Д.В.

КФУ им. В.И.Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: tretyakov_d_v@mail.ru

Рассмотрим плотно заданный линейный оператор A с непустым множеством регулярных точек, к примеру, $-i \in \rho(A)$, который действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Образуем пространство $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$, где $\mathfrak{D}_\pm$ – гильбертовы пространства с индефинитными метриками $J_\pm$ соответственно, которые строятся с помощью полярных представлений дефектных операторов оператора A:

$$B_- = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R_{-i}R^*_{-i}, \;\; B_+ = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i}.$$

Положим $J = J_- \oplus I \oplus J_+$. В пространстве $\mathbb{H}$ строится J-самосопряжённая дилатация оператора A с помощью $J_\pm$-симметрических, максимальных в пространствах $\mathfrak{D}_\pm$ операторов.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ j-ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Ляхов Л.Н.

Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)

E-mail: levnlya@mail.ru

Через j_ν обозначим (нормированную) j-функцию Бесселя порядка ν [1]. В [2] введена операторная j-функция Бесселя

$$j_\nu(ir\sqrt{\Delta_\gamma}) = A(\nu)\sum_{k=0}^{\infty} C_m(\nu) \;\; \left[(ir)^2\,\Delta_\gamma\right]^m .$$

Известно [3] следующее представление весового сферического осреднения

$$(M_r^\gamma f)(x) = j_\nu(ir\sqrt{\Delta_\gamma})f(x), \quad \nu = \frac{n+|\gamma|}{2}.$$

Пусть

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\,,$$

где γ_i — составляющие мультииндекса γ, ξ_i — координаты фиксированного единичного вектора. Для функции

$$u(x,t) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\; j_{\frac{\delta-1}{2}}(t)$$

в [4] получено следующее представление

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\; j_{\frac{\delta-1}{2}}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\frac{t^{1-\delta}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{[\alpha]+1}\int\limits_0^t \frac{r^{n+|\gamma|-1}\; M_r^\gamma \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{(t^2-r^2)^{\{\alpha\}}}\,dr\,,$$

$\alpha = \frac{n+|\gamma|-1}{2}$. Учитывая формулу

$$M_r^\gamma \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\; j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(r|\xi|)$$

(см. [3], теорема 1, формула (10)) имеем

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\; j_{\frac{\delta-1}{2}}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\frac{t^{1-\delta}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{[\alpha]+1}\int\limits_0^t \frac{r^{n+|\gamma|-1}\;\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\; j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(r)}{(t^2-r^2)^{\{\alpha\}}}\,dr\,,$$

Если положить здесь $x = 0$, то получим весьма примечательную формулу

$$j_{\frac{\delta-1}{2}}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{t^{1-\delta}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{[\alpha]+1} \int\limits_0^t \frac{r^{n+|\gamma|-1}\; j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(r)}{(t^2-r^2)^{\{\alpha\}}}\, dr\,, \quad \alpha = \frac{n+|\gamma|-1}{2}.$$

Если число $|\gamma|$ — натуральное, то

$$j_{\frac{\delta-1}{2}}(t) = \frac{2^{n+|\gamma|-1}\,\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+|\gamma|-1)}\; t^{1-\delta} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{n+|\gamma|-1} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} r^{n+|\gamma|-1}\; j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(r)\, dr\,.$$

Список литературы

[1] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. Успехи матем наук, т. VI, в.2 (42), 1951, С. 102-143.

[2] Йон Ф. Плоские волны и сферичесие средние в применении к диференциальным уравнениям с частными производными. М., Изд.-во иностр. лит. 1958, 158 с.

[3] Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л. Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения. // Дифференц. уравнения 2014. Т.50, № 4. С.516-528.

[4] Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л. Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени. Доклады Академии наук. - 2014. - Т. 459, № 5. - С. 533-538.

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ $\Lambda^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$

Муратов М. А., Рубштейн Б. А.

Крымский федеральный университет (Россия, Симферополь),
Университет Бен Гуриона в Негеве (Израиль, Беер Шева)

E-mail: mustafa.muratov@gmail.com

Пусть $(\mathbb{R}^+, m)$ — полупрямая $[0,\infty)$ с обычной мерой Лебега m и $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$ — пространство всех конечных почти всюду на $\mathbb{R}^+$ измеримых вещественных функций, $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^+, m)$, $1 \le p \le \infty$, $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — симметричное пространство (с.п.) функций из $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$.

Пусть $\mathbf{X}^0 = cl_{\mathbf{X}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ — замыкание $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ в пространстве $\mathbf{X}$ с нормой $\|f\|_{\mathbf{X}^0} = \|f\|_{\mathbf{X}}$, $f \in \mathbf{X}^0$, $(\mathbf{X}^1, \|\cdot\|_{\mathbf{X}^1})$ — с.п., ассоциированное с $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, а $(\mathbf{X}^{11}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}^{11}})$ — второе ассоциированное, $\varphi_{\mathbf{X}} = V$ — фундаментальная функция $\mathbf{X}$, $\widetilde{V}$ — ее наименьшая вогнутая мажоранта, $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)}$, $x > 0$, $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ и $\mathbf{M}_{V_*}$ соответствующие пространства Лоренца и Марцинкевича.

Теорема 1.

- $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X}^0 \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}^{11} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$
- $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \|f\|_{\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}} \ge \|f\|_{\mathbf{X}^0} = \|f\|_{\mathbf{X}}$ *для* $f \in \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$
- $\|f\|_{\mathbf{X}} \ \ge\ \|f\|_{\mathbf{X}^{11}} \ \ge\ \|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}}$ *для* $f \in \mathbf{X}$

Следствие 1.

- *Если* $V(\infty) = \infty$, *то* $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$.
- *Если* $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{11}$, *то* $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$.

Список литературы

[1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Москва, Наука (1978), 400 с.

[2] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach Spaces II*, Springer (1979), 327 p.

[3] Bennet C., Sharpley R., *Intropolation of operators*, London, Academic Press (1988), 327 p.

[4] Рубштейн Б. А., Грабарник Г. Я. Муратов М. А., Пашкова Ю.С, *Введение в теорию симметричных пространств измеримых функций*, Симферополь, Т. 1, (2014), 204 с.

ОБОБЩЕННЫЕ КОНГРУЭНЦ-ПОДГРУППЫ

Нужин Я.Н.

Сибирский федеральный университет (Россия, Красноярск)

E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Пусть I — идеал коммутативного (ассоциативного) кольца K с единицей. Множество матриц $G(I) = \{(a_{ij}) \in SL_n(K) \mid a_{ij} \equiv \ \delta_{ij} \ modI\}$ является подгруппой специальной линейной группы $SL_n(K)$ и называется *конгруэнц-подгруппой по модулю идеала* I.

Следуя [1], назовем *полным матричным ковром степени* n всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\}$ кольца K с условиями $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \ 1 \le i, r, j \le n$. Множество матриц $G(\mathfrak{A}) = \{(a_{ij}) \in SL_n(K) \mid a_{ij} \equiv \ \delta_{ij} \ mod \ \mathfrak{A}_{ij}\}$ является подгруппой группы $SL_n(K)$ и называется *конгруэнц-подгруппой по модулю ковра* $\mathfrak{A}$ (*обобщенной конгруэнц-подгруппой*).

Понятия ковра и обобщенной конгруэнц-подгруппы нашли широкие приложения и были перенесены на группы Шевалле, в частности, на другие классические группы (симплектические, ортогональные, унитарные) различными способами. Здесь используется определения ковра аддитивных подгрупп, предложенное В.М.Левчуком [2].

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $E(\Phi, K)$ — группа Шевалле типа Φ над кольцом K, порожденная корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}, \quad r \in \Phi$. *Ковром типа* Φ *над* K называется набор аддитивных подгрупп (в частности, идеалов) $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi, \ i, j > 0, \tag{1}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs}$ равны ±1, ±2 или ±3. Включения (1) происходят из коммутаторной формулы Шевалле

$$\big[x_s(u), x_r(v)\big] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-v)^i u^j\big), \quad r, s, ir + js \in \Phi. \tag{2}$$

При $\Phi = A_{n-1}$ ковер $\mathfrak{A}$ совпадает с *элементарным матричным ковром* (ковром без диагонали) $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \le i, \ j \le n, \ i \ne j\}$ степени n и в этом частном случае соотношения (1) записываются в виде $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}$ для всех попарно различных i, r, j, а формула (2) совпадает с правилом коммутирования трансвекций $t_{ik}(u)$ и $t_{kj}(v)$ при $i \ne j$.

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ определяет *ковровую подгруппу* $E(\mathfrak{A})$, порожденную подгруппами $x_r(\mathfrak{A}_r), \ r \in \Phi$. Ковер $\mathfrak{A}$ назовем: *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов; *неприводимым*, если все его аддитивные подгруппы ненулевые; *унипотентным*, если нулевые все его аддитивные подгруппы, индексированные отрицательными корнями относительно некоторой фундаментальной системы корней.

В докладе предполагается затронуть некоторые конкретные приложения ковровых подгрупп, а также результаты и нерешенные задачи, касающиеся собственно теории ковров и ковровых подгрупп как над полями, так и над кольцами. Например, справедлива

Теорема 1. *Ковровая подгруппа* $E(\mathfrak{A})$ *группы Шевалле типа* Φ *над полем* K *является полупрямым произведением подгрупп* $E(\mathfrak{A}^+) = \big\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi, \ \mathfrak{A}_r \ne 0, \ \mathfrak{A}_{-r} = 0\big\rangle$ *и* $E(\mathfrak{A}^\pm) = \big\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi, \ \mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r} \ne 0\big\rangle$ *с ядром* $E(\mathfrak{A}^+)$, *причем подгруппа* $E(\mathfrak{A}^+)$ *определяется унипотентным ковром типа* Φ, *а подгруппа* $E(\mathfrak{A}^\pm)$ *является центральным произведением ковровых подгрупп, каждая из которых определяется неприводимым подковром типа* Φ_i *для некоторой неразложимой подсистемы корней* Φ_i *системы* Φ.

Вопрос о замкнутости данного ковра является первостепенным при изучении ковровых подгрупп и их приложений. Всякий унипотентный ковер замкнут, поэтому теорема редуцирует вопрос о замкнутости любого ковра над полем к такому же вопросу для неприводимых ковров. Её можно рассматривать также как аналог разложения Леви для алгебраических групп.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707)

Список литературы

[1] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И., *Основы теории групп*, М.: Наука, 1971.

[2] Левчук В.М., *Параболические подгруппы некоторых ABA-групп*, Мат. заметки, 31 (1982), вып. 4, стр. 509–525.

СХОДИМОСТЬ ЧЕЗАРОВСКИХ СРЕДНИХ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.

Крымский федеральный университет (Россия, Симферополь),
Университет Бен Гуриона в Негеве (Израиль, Беер Шева)

E-mail: pashkova.kromsh@gmail.com

Пусть $(\mathbb{R}^+, m)$ — полупрямая $[0, \infty)$ с обычной мерой Лебега m и $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$ — пространство всех конечных почти всюду на $\mathbb{R}^+$ измеримых вещественных функций, $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^+, m)$, $1 \le p \le \infty$, $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ — симметричное пространство функций из $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$, f^* — убывающая перестановка функции $|f|$, $f^{**}(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f^*(u)\,du, x \in (0, +\infty)$, $\mathbf{E_H} = \{f \in \mathbf{X}\colon f^{**} \in \mathbf{X}\}$, $\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : f^*(+\infty = 0)\}$ и $p_{\mathbf{E}}$ — нижний индекс Бойда с.п. $\mathbf{E}$.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{E}$ называется (o)-сходящейся к $f \in \mathbf{E}$, если существуют такие $0 \le g_n \in \mathbf{E}$, что $|f_n - f| \le g_n \downarrow 0$.

Пусть $T : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ положительное $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-сжатие и

$$A_{n,T}f = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}(f),\ f \in \mathbf{E}$$

соответствующие чезаровские средние.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) Последовательность $\{A_{n,T}f\}$ (o)-сходится в $\mathbf{E}$ для любой функции $f \in \mathbf{E}$ и любого положительного $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-сжатия T;

(2) $\mathbf{E} = \mathbf{E_H} \cap \mathcal{R}_0$;

(3) $p_{\mathbf{E}} > 1$ and $1 \notin \mathbf{E}$.

Список литературы

[1] Muratov M, Pashkova J., Rubshtein B., *Order Convergence Ergodic Theorems in Rearrangement Invariant Spaces*, Operator Theory: Advances and Applications (2013) vol. 227, P. 123–142.

[2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Москва, Наука (1978), 400 с.

[3] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach Spaces II*, Springer (1979), 327 p.

ЗАДАЧА М.Г. КРЕЙНА И ФОРМУЛА СЛЕДОВ ЛИФШИЦА-КРЕЙНА

Пеллер В.В.

(Россия, США, Восточный Лэнсинг)

E-mail: pellerv@gmail.com

Пусть A и B – самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве такие, что их разность $A - B$ ядерна. Тогда такой паре соответствует единственная функция спектрального сдвига ξ на вещественной прямой такая, что $\xi \in L^1(\mathbb{R})$ и имеет место формула следов Лифшица–Крейна

$$\operatorname{trace}(f(A) - f(B)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(t)\xi(t)dt$$

для достаточно хороших функций f.

М.Г. Крейн поставил задачу описать максимальный класс функций f, для которых эта формула справедлива.

В этой лекции я собираюсь рассказать о решении этой задаче. Искомый класс совпадает с классом *операторно липшицевых функций*, т.е. с классом таких функций f, для которых имеет место неравенство

$$\|f(A) - f(B)\| \le \operatorname{const}\|A - B\|$$

для любых самосопряжённых операторов A и B.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ, СОГЛАСОВАННЫХ С ПОРЯДКОМ

Плиев М.А.

Южный математический институт (Россия, Владикавказ)

E-mail: plimarat@yandex.ru

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках в настоящее время привлекают внимание исследователей [1,2]. В докладе представлены некоторые результаты, связанные с приложением теории ортогонально аддитивных операторов в векторных решетках к теории интегральных операторов, действующих в идеальных пространствах измеримых функций.

Пусть E — векторная решетка, $x \in E$ и $y \perp (x - y)$ для некоторого $y \in E$. Тогда y называют *осколком* элемента x. Множество всех осколков x является булевой алгеброй и обозначается $\mathcal{F}_x$. Рассмотрим бинарное отношение $\sqsubseteq$ на E, заданное следующим образом: $x \sqsubseteq y$ тогда и только тогда, когда x — осколок y. Отметим, что отношение $\sqsubseteq$ является частичным порядком на E.

Пусть E и F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется:

- *положительным*, если $Tx \geq 0$ для любого $x \in E$;
- *латерально-порядково ограниченным*, если множество $T(\mathcal{F}_x)$ порядково ограничено в F для любого $x \in E$.

Ортогонально аддитивный, латерально-порядково ограниченный оператор $T : E \to F$ называется *оператором Попова*. Множество всех операторов Попова из E в F обозначается через $\mathcal{P}(E, F)$.

Векторное пространство $\mathcal{P}(E, F)$ может быть упорядочено следующим образом: $S \leq T$ если $T - S$ — положительный оператор. Таким образом $\mathcal{P}(E, F)$ является упорядоченным векторным пространством. Если же векторная решетка F порядково полна, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть E и F — векторные решетки и решетка F — порядково полна. Тогда $\mathcal{P}(E, F)$ — порядково полная векторная решетка и для любых $S, T \in \mathcal{P}(E, F)$ и $x \in E$ имеют место формулы:

(1) $(T \vee S)(x) := \sup\{Ty + Sz : x = y + z, y \perp z\}$;
(2) $(T \wedge S)(x) := \inf\{Ty + Sz : x = y + z, y \perp z\}$;
(3) $(T)^+(x) := \sup\{Ty : y \sqsubseteq x\}$;
(4) $(T)^-(x) := -\inf\{Ty : y \sqsubseteq x\}$;
(5) $|Tx| \leq |T|(x)$.

Список литературы

[1] V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov, O. Sobchuk *Dividing measures and narrow operators*, Studia Math. 231 (2015), pp. 97-116.

[2] Pliev M.A., Popov M.M. *Narrow orthogonally additive operators*, Positivity, v.18, 4, (2014). pp. 641-667.

О СХОДИМОСТИ СУММ РИМАНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ K-МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Преображенский И.Е.

ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Россия, Ярославль)

E-mail: preobrazenskii@gmail.com

Пусть I — отрезок [0;1] с обычной мерой Лебега и X симметричное пространство функций на I. ψ — фундаментальная функция пространства X. $f : I \to R$ периодическая функция с периодом 1.

Рассмотрим оператор сумм Римана $R_n f(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}), x \in I$. Определим k-модуль непрерывности равенством $\omega_k(f, \delta; X) = \sup_{0<h\leq\delta} \left\| \Delta_h^k(f, \cdot)|X \right\|$, где $\Delta_h^k(f;t) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(t + ih)$.

Через U обозначим множество квазивогнутых функций $\varphi : I \to R_+$. Через $U(k)$, $k = 2, 3, \ldots$ обозначим множество функций $\varphi : [0, 1] \to R_+$, состоящее из функций, которые не убывают, но для которых отношение $\varphi(t)/t^k$ не возрастает. Пусть $\varphi \in U(k)$. Через $H_X^{\varphi,k}$ обозначим пространство функций, норма в котором задаётся равенством $\left\| f|H_X^{\varphi,k} \right\| = \|f|X\| + \sup\limits_{h>0, h\in I} \frac{\omega_k(f,h;X)}{\varphi(h)}$.

Теорема. Пусть X— симметричное пространство с фундаментальной функцией $\psi(X,t) = t^{1/p},\ p \in [1;\infty)$. Положим $\varphi(t) = t^{\alpha},\ \alpha \in (0;k), \beta > 0$. Пусть дана функция $f(x) \in H_X^{\varphi,k}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$, каждое число которой взаимнопросто с числами от 1 до k. Тогда, если справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln^{1+\beta} n_i}{n_i^{\alpha p}} < \infty, \tag{1}$$

то почти всюду выполняется равенство $\lim\limits_{i\to\infty} R_{n_i} f(x) = \int_I f(s)ds$.

Доказательство теоремы в существенном базируется на конструкциях из [1].

Список литературы

[1] Бережной Е. И., *Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств*, Изв. РАН. Сер. матем. Т. 60, № 2 (1996), С. 3–20.

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ B-ПРОИЗВОДНОЙ j-МНОГОЧЛЕНА ШЛЕМИЛЬХА

Санина Е.Л.

Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)

E-mail: sanina08@mail.ru

Пусть $f(t)$ локально интегрируемая на $\mathbb{R}_1$ четная функция. Выражение

$$(T^{\tau} f) = C(\nu) \int\limits_0^{\pi} f(\sqrt{t^2+\tau^2-2t\tau\cos\alpha})\, sin^{2\nu}\alpha\, d\alpha, \quad \text{где } C(\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

называется обобщенным сдвигом функции f, число $\nu > -1/2$ называется порядком обобщенного сдвига. Свойства изучены в работе [1], некоторые из свойств приведены в [2].

Обозначим через Π^p действие оператора Пуассона

$$\Pi_x^{\nu} f(x) = C(\nu) \int\limits_0^{\pi} f(x\cos\alpha)\ \sin^{2\nu}\alpha\ d\alpha, .$$

j-Функция Бесселя связана с функцией Бесселя первого рода равенством: $j_p(x) = C(p)\frac{J_p(x)}{x^p}$. Для этой функции известно представление интегралом Пуассона $j_p(x) = \Pi^p\, e^{-i\,x} = \Pi^p\, \cos x$. Учитывая, что нормирующая константа в операторе Пуассона подобрана так, чтобы $\Pi^p(1) = 1$, можем записать представление j-многочлена Шлемильха в виде (см. [3])

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m j_p(mx) = \Pi^p \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos(mx)\right) = \Pi^p(T_n(x)),$$

а $T_n(x)$ – тригонометрический многочлен порядка n.

B-производная функции f имеет вид

$$\lim_{h\to 0} \frac{T^h f(x) - f(x)}{(h/2)^2} = \frac{1}{2(\nu+1)} B_{\nu} f(x),$$

где B_{ν} оператор Бесселя, определяемый формулой

$$B_{\nu} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\,\frac{d}{dx}.$$

Теперь сформулируем следующий результат (для тригонометрических многочленов обычно называемый *неравенством Бернштейна*).

Теорема. *Пусть S_n — четный j-многочлен Шлемильха порядка n и $T_n(x)$ — его сопровождающий многочлен, т.е. $S_n(x)$=$\Pi^p T_n(x)$ и пусть на отрезке $[0,\pi]$ выполняется неравенство*

$$|T_n(x)| \le M.$$

Тогда

$$|S_n(x)| \le M.$$

Для произвольного натурального числа k
$$|B_\nu^k\, S_n(x)| \le n^{2k} \sup_{x\in[0,\pi]} |S_n(x)| \le n^{2k}\, M, \quad x\in[0,\pi],$$
где B_ν *— сингулярный дифференциальный оператор Бесселя,* $\nu > -\frac{1}{2}$.

Список литературы

[1] Левитан Б.М., *Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя*, УМН., Т.6, № 2 (1951), С. 102 - 143.

[2] Ляхов Л.Н., *Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена—Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье*, Тр. Московского Математ. Общества, Т.76, вып.1 (2015), С. 67-84.

[3] Lyakhov L.N., Sanina E.L., *Inverpolation Formulas for Integral Operations of Weighted Plane Wave Type*, Journal of mathematical sciences Volume 216 (2016), P. 107-112.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ФАБЕРА ДЛЯ ПОЛИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Цвиль М.М.

Ростовский филиал Российской таможенной академии (Россия, Ростов-на-Дону)

E-mail: tsvilmm@mail.ru

Через C^n обозначим n-мерное комплексное пространство, его точки $z = (z,z_2,\ldots,z_n)$. Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \ldots \times D_n^-$ — полицилиндрические области в C^n с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$, где D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^1, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$; $U^+ = \{w\in\mathbb{C}^n\colon |w_k| < 1,\ k = 1,2,\ldots,n\}$ — поликруг в $\mathbb{C}^n$, T^n — единичный тор.

Рассмотрим функцию $\tau(t)$, аналитическую в U^+ и имеющую почти всюду на торе T^n угловые граничные значения. Преположим, что функция $(\varphi^*\tau)(\zeta) = \tau(\varphi_1(\zeta_1),\varphi_2(\zeta_2),\ldots,\varphi_n(\zeta_n))$ интегрируемая на остове σ полицилиндрической области D^+, т. е.
$$\int\limits_\sigma |(\varphi^*\tau)(\zeta)||d\zeta_1|\ldots|d\zeta_n| = \int\limits_{T^n} |\tau(t)||(\psi_1'(t_1)||(\psi_n'(t_n)||dt_1|\ldots|dt_n|. \tag{1}$$

Рассмотрим n-мерный интеграл типа Коши:
$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\sigma \frac{(\varphi^*\tau)(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^I}, \quad z\in D^+, \tag{2}$$
где $d\zeta = d\zeta_1\ldots d\zeta_n$; вектор $(1,1,\ldots,1)$ обозначим через I.

Если функции $\phi_k'(w_k)\in H^2(U_k^-)$, то условие (1) выполняется для любой функции $\tau(t)\in H^2(U^+)$. Тогда по формуле (2) каждой функции $\tau(t)\in H^2(U^+)$ ставится в соответствие некоторая функция $f(z)$, аналитическая в D^+. Тем самым определяется интегральный оператор на множестве функций класса H^2. Оператор, определяемый формулой (2), назовем оператором Фабера для полициндрической области D^+ в $\mathbb{C}^n$ и обозначим его через $\Phi = (\Phi\tau)(z)$.

Одно из основных свойств оператора Фабера состоит в том, что всякий многочлен n переменных $t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n$
$$Q_\Omega(t) = \sum_{\ell\in\Omega} c_\ell t^\ell \tag{3}$$
преобразуется в многочлен по n переменным $z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_n$ вида $\sum\limits_{\ell\in\Omega} c_\ell\Phi_\ell(z)$, где $\ell = (\ell_1,\ldots,\ell_n)$, Ω — некоторое подмножество целочисленной решетки Z_+^n с неотрицательными координатами
$$\Phi_\ell(z) = \bigcup_{k=1}^n \Phi_\ell^{(k)}(z_k),$$
$\Phi_\ell^{(k)}(z_k)$ — многочлен Фабера одного переменного. Тем самым оправдывается название оператора.

Специфика многомерного случая проявляется в многообразии построения алгебраических полиномов в зависимости от конструкции множестве Ω. Приводятся оценки нормы оператора Фабера в конкретных функциональных пространствах.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ХАЛМОША, ОТНОСЯЩИХСЯ К ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Шульман В.С.

Вологодский государственный университет (Россия, Вологда)
E-mail: shulman.victor80@gmail.com

Статья П. Халмоша "Десять проблем теории операторов", опубликованная в 1970-м году, стимулировала необыкновенно бурное и глубокое развитие обсуждавшихся в ней задач. В лекции будет дан краткий обзор современного состояния тех из рассмотренных Халмошем вопросов, в которых идет речь о существовании и структуре инвариантных подпространств для операторов и семейств операторов. В частности, мы обсудим результаты С.Брауна и др., связанные с техникой векторных функционалов, решение (В.И. Ломоносовым и А. Симоничем) проблемы существования вещественного инвариантного подпространства для компактных возмущений самосопряженных операторов, а также полученное недавно В.И. Ломоносовым и Ф.Л. Назаровым и еще не опубликованное доказательство существования транзитивных троек подпространств.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ГРУППАХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Шульман Е.В.

Вологодский Государственный Университет (Россия, Вологда),
Silesian University (Poland, Katowice)
E-mail: shulmanka@gmail.com

Скалярную функцию f на группе G будем называть *многочленом степени n*, если она удовлетворяет разностному уравнению

$$\Delta_{h_{n+1}} \dots \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f = 0 \qquad \text{для любых} \;\; h_1, ..., h_{n+1} \in G.$$

Далее, функцию $f : G \to \mathbb{C}$ будем называть *s-многочленом степени n*, если она удовлетворяет уравнению

$$\Delta_h^{n+1} f = 0 \qquad \text{для любого} \;\; h \in G.$$

Утверждение 1 Каждый s-многочлен первой степени является многочленом степени не выше двух.

Утверждение 2 Ограниченный s-многочлен есть константа.

Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется *экспоненциальным многочленом*, если её орбита $\{R_h f(\cdot) = f(\cdot h),\ h \in G\}$ под действием правого регулярного представления содержится в конечномерном пространстве.

Утверждение 3. Если экспоненциальный многочлен является s-многочленом, то он многочлен.

Для дальнейшего удобно распространить наши определения на случай произвольного представления группы G.

Пусть задано представление π группы G в линейном пространстве X. Будем называть элемент $x \in X$ *многочленом степени n относительно π*, если

$$(\pi_{h_{n+1}} - I) \dots (\pi_{h_2} - I)(\pi_{h_1} - I)x = 0 \qquad \text{для любых} \;\; h_1, ..., h_{n+1} \in G.$$

Подобным образом, x называется*s-многочленом степени n относительно π*, если

$$(\pi_h - I)^{n+1} x = 0, \qquad \text{для любого} \;\; h \in G.$$

Тогда предыдущее утверждение становится следствием более общего факта:

Утверждение 4. Если $\dim X < \infty$ то каждый s-многочлен относительно π является многочленом относительно π.

Секция 2. Спектральная теория операторов

О НОВОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ФОРМУЛ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ахмерова Э.Ф.

Башкирский государственный университет (Россия, Уфа)

E-mail: eakhmerova@yandex.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассмотрим самосопряженный оператор H^0 с дискретным спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$ и соответствующими собственными проекторами P_k, причем $\inf\limits_{k\geq 1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) > 0$. Обозначим через $R_n^0(\lambda)$ приведенную резольвенту оператора H^0, $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - P_n(\lambda_n-\lambda)^{-1}$, $d_n = \min\dfrac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n,\, \lambda_n-\lambda_{n-1})}{2}$. Пусть существует последовательность ρ_n:

$$0 < \rho_n \leq d_n, \quad \inf_{n\geq 2}\rho_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{|\lambda-\lambda_n|\leq\rho_n}\|R_n^0(\lambda)V\| = 0. \tag{1}$$

Тогда, согласно рассуждениям работы [1], спектр оператора $H = H^0+V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + P_nVP_n - P_nVR_n(\lambda)VP_n, \tag{2}$$

где $R_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[R_n^0(\lambda)V\right]^k R_n^0(\lambda)$.

Выражение (2) представляет собой формулу для спектра $\det(A_n-\lambda) = 0$ конечномерного оператора A_n в окрестности собственнного числа λ_n, $|\lambda-\lambda_n| < \rho_n$ при фиксированных n. Тогда, используя тот факт, что для конечномерных операторов спектральный след равен матричному, из уравнения (2) легко следует представление

$$\nu_n\lambda_n + \sum_{k=1}^{\nu_n}\left(V\varphi_k^{(n)},\varphi_k^{(n)}\right) - \gamma_{\nu_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{v_n}\mu_k^{(n)}, \tag{3}$$

где $\mu_k^{(n)}$ – собственные числа оператора H, $|\lambda_n-\mu_k^{(n)}| < \rho_n$, $\gamma_{\nu_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\nu_n}\left(VR_n(\mu_k^{(n)})V\varphi_k^{(n)},\varphi_k^{(n)}\right)$.

Если возмущение V таково, что последовательность $\sum_{n=1}^{m}\gamma_{\nu_n}^{(n)} \to 0$ при $m\to\infty$, то из формулы (3) следует справедливость формулы регуляризованного следа оператора H

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu_n}\mu_k^{(n)} - \nu_n\lambda_n - \sum_{k=1}^{\nu_n}\left(V\varphi_k^{(n)},\varphi_k^{(n)}\right)\right) = 0. \tag{4}$$

В качестве примера рассматривается оператор $H^0 = T\otimes I_1 + I_2\otimes L$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1\otimes\mathbb{H}_2$, где $\mathbb{H}_1 = L^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{H}_2 = L^2[0,\pi]$, I_1 и I_2 – единичные операторы в соответствующих пространствах, $Tf = -f'' + x^2f$, $f(0) = 0$, $f\in L^2(\mathbb{R})$, $Lg = -g''$, $g(0) = g(\pi) = 0$. Получена формула регуляризованного следа (4), где в качестве возмущения взят оператор умножения V на вещественную финитную функцию $V(x,y)\in\mathbb{H}$.

В качестве второго примера рассматривается возмущение оператора Лапласа в квадрате. Получена аналогичная формула следа вида (4).

Список литературы

[1] Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х. *Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов*, Докл. РАН. 2003.Т. 388, № 6. С. 731-733.

О СВЯЗИ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ОБРАТНЫХ К КВАДРАТИЧНЫМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ МАТРИЧНЫМ ПУЧКАМ

Барсуков А.И., Домнич А.А.

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет (Россия, Воронеж),
Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)

E-mail: a.barsoukov@mail.ru, andomnich@inbox.ru

Известно (см., например, [1]), что любой квадратичный пучок $L(\lambda) = \lambda^2 I + B\lambda + C$ с эрмитовыми матричными коэффициентами можно представить в виде $L(\lambda) = (\lambda I - X)(\lambda I - Y)$. Пучок L называется гиперболическим, если корни любого многочлен $p_f(\lambda) = (L(\lambda)f, f)$, $f \neq \theta$ вещественны и различны. В работе [2] показано, что для квадратичных гиперболических пучков L имеет место представление

$$L^{-1}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \frac{K_j}{\lambda - \zeta_j}, \quad \text{если } \det L(\lambda) \neq 0,$$

где K_j – эрмитовы матрицы специального вида.

Нами установлена связь между матрицами X, Y и K_j, $j = 1, \dots, N$.

Теорема 1. *Пусть $L(\lambda) = (\lambda I - X)(\lambda I - Y)$ является гиперболическим пучком, $\sigma(X) = \{\xi_i\}_{i=1}^m$, $\sigma(Y) = \{\mu_i\}_{i=1}^k$, $\sigma(X) \cap \sigma(Y) = \varnothing$ и*

$$L^{-1}(\lambda) = (\lambda I - Y)^{-1}(\lambda I - X)^{-1} = \frac{M_1}{\lambda - \mu_1} + \dots + \frac{M_k}{\lambda - \mu_k} + \frac{N_1}{\lambda - \xi_1} + \dots + \frac{N_m}{\lambda - \xi_m}. \qquad (1)$$

Тогда выполнены равенства

$$X = -\Big(\sum_{i=1}^m N_i\Big)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m \xi_i N_i = \Big(\sum_{i=1}^k M_i\Big)^{-1} \cdot (I - \sum_{i=1}^k \mu_i M_i),$$

$$Y = -\Big(\sum_{i=1}^k \mu_i M_i\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^k M_i\Big)^{-1} = (I - \sum_{i=1}^m \xi_i N_i) \cdot \Big(\sum_{i=1}^m N_i\Big)^{-1}.$$

Так же исследованы условия эрмитовости матриц X и Y в разложении на множители гиперболического пучка $L(\lambda) = (\lambda I - X)(\lambda I - Y)$.

Теорема 2. *Пусть $L(\lambda) = (\lambda - X)(\lambda - Y)$ является гиперболическим матричным пучком и имеет место представление* (1). *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $X = X^*$;
2) $Y = Y^*$;
3) $M_i M_j = 0$ *для всех* $i \neq j$;
4) $N_i N_j = 0$ *для всех* $i \neq j$.

Работа выполнена при поддержке грант РФФИ №15-01-05315-а.

Список литературы

[1] А.С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев (1986), 260 с.

[2] T.Ya. Azizov, A. Dijksma, K.-H. Förster, P. Jonas, *Quadratic (weakly) hyperbolic matrix polynomials: direct and inverse spectral problems*, Operator Theory: Adv. and Appl. 198 (2009), pp. 11-40.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА ПО СПЕКТРУ

Бондаренко Н.П., Бутерин С.А.

Самарский университет (Россия, Самара),
Саратовский государственный университет (Россия, Саратов)
E-mail: bondarenkonp@info.sgu.ru, buterinsa@info.sgu.ru

Рассмотрим интегро-дифференциальную систему Дирака следующего вида:

$$By' + \int\limits_0^x M(x-t)y(t)\,dy = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ -q(x) & p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$ — комплекснозначные функции, $(\pi-x)p(x)$, $(\pi-x)q(x) \in L_2(0,\pi)$; λ — спектральный параметр. Пусть $D = D(p,q)$ — краевая задача для системы (1) с краевыми условиями

$$y_1(0) = y_1(\pi) = 0. \tag{2}$$

Изучается следующая *обратная задача*: по заданному спектру задачи D построить функции $p(x)$ и $q(x)$. Получено конструктивное решение обратной задачи, основанное на ее сведении к системе нелинейных интегральных уравнений. Данный подход представляет собой развитие идей работы [1], в которой исследуется обратная задача для уравнения Штурма-Лиувилля с интегральным запаздыванием (см. также др. работы из списка литературы в [2]).

Доказана следующая теорема, дающая единственность решения, а также необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ являлась спектром некоторой краевой задачи $D(p,q)$ с функциями p и q, удовлетворяющими условию $(\pi-x)p(x)$, $(\pi-x)q(x) \in L_2(0,\pi)$, необходимо и достаточно выполнения асимптотической формулы:*

$$\lambda_k = k + \varkappa_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \{\varkappa_k\} \in l_2.$$

При этом краевая задача $D(p,q)$ однозначно определяется по своему спектру.

Приведенные результаты опубликованы в статье [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014K) и грантов РФФИ (проекты 15-01-04864 и 16-01-00015).

Список литературы

[1] Buterin S.A. *On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator*, Res. Math. 50 (2007), no.3-4, 73–181.

[2] Bondarenko N., Buterin S. *On Recovering the Dirac Operator with an Integral Delay from the Spectrum*, Res. Math., published online (2016), 1–9.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ

Бондаренко Н.П., Бутерин С.А., Васильев С.В.

Самарский университет (Россия, Самара),
Саратовский государственный университет (Россия, Саратов)

E-mail: bondarenkonp@info.sgu.ru, buterinsa@info.sgu.ru, altrair@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x), a, \alpha, \beta)$ вида

$$-y''(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0, \tag{2}$$

где λ – спектральный параметр, $q(x)$ – комплекснозначная функция из $L_2(0,\pi)$ и α, $\beta \in \{0,1\}$. Предположим также, что $k := \pi/a \in \mathbb{N}$, случай $k \notin \mathbb{N}$ требует отдельного исследования.

Изучается следующая обратная задача: по спектру краевой задачи L найти потенциал $q(x)$. Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач получены для классического оператора Штурма-Лиувилля, а в последствии – и для дифференциальных операторов произвольных порядков, дифференциальных пучков и дифференциальных систем (см., например, обзор в [1]). Для дифференциальных операторов с отклоняющимся аргументом и других классов нелокальных операторов классические методы теории обратных задач не работают, а в этом направлении имеются лишь отдельные результаты, не составляющие общей картины. Отметим, что случай $a = \pi$ с вещественным потенциалом $q(x)$, условием Дирихле в нуле и нелокальным краевым условием $y'(\pi) + (y, q)_{L_2(0,\pi)} = 0$ исследовался в [2].

В настоящей работе установлено, что единственность решения обратной задачи зависит от значений α, β и иногда от четности k. При этом в ряде случаев единственность имеет место только в классе потенциалов, удовлетворяющих дополнительному условию. Например, условию

$$q(a - t) = Aq(a + t), \quad 0 < t < a, \tag{3}$$

где A – некоторый однозначно определяемый по спектру оператор в $L_2(0, a)$, такой что $I + A$ обратим, а I – тождественный оператор. В частности, если $A \equiv I$, то условие (3) равносильно четности потенциала относительно точки a. Заметим, что случай нечетного $q(x)$ условием (3) не охватывается. Постоянный A соответствует случаю, когда $q(x)$ на $(0, a)$ известен априори. Справедлива следующая теорема единственности решения обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнена одна из следующих групп условий: 1) $\alpha = \beta = 0$ и выполнено условие (3); 2) $\alpha = 0$, $\beta = 1$; 3) $\alpha = \beta = 1$ и k нечетное; 4) $\alpha = \beta = 1$, k четное, но выполнено условие (3). Тогда задание спектра однозначно определяет функцию $q(x)$.*

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Теорема 2. *Для того, чтобы произвольная последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ была спектром некоторой краевой задачи L вида (1), (2), необходимо и достаточно выполнения одной из следующих групп условий в зависимости от значений α, β и k :*

1) при $\alpha = \beta = 0$:

$$\lambda_n = \Big(n + \frac{\kappa_n}{n}\Big)^2, \quad \{\kappa_n\} \in l_2, \quad \lambda_{kn} = (kn)^2, \quad n \in \mathbb{N};$$

2) при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$:

$$\lambda_n = \Big(n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_n}{n}\Big)^2, \quad \{\kappa_n\} \in l_2;$$

3) при $\alpha = \beta = 1$ и нечетном k :

$$\lambda_n = \Big(n - 1 + \frac{\kappa_n}{n}\Big)^2, \quad \{\kappa_n\} \in l_2; \tag{4}$$

4) и, наконец, при $\alpha = \beta = 1$ и четном k : (4) и $\lambda_{k(n-1/2)+1} = k^2(n - 1/2)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 2 конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи.

Работа поддержана РФФИ (проекты 15-01-04864, 16-01-00015) и Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014K).

Список литературы

[1] Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит, 2007.

[2] Albeverio S., Hryniv R.O. and Nizhnik L.P. *Inverse spectral problems for non-local Sturm-Liouville operators*, Inverse Problems 23 (2007), no.2, 523—535.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Власов В.В.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

Наши исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегродифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегродифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегродифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho\ddot{u}(x,t) - Lu(x,t) + \int_0^t \Gamma_1(t-s)L_1u(x,s)ds + \int_0^t \Gamma_2(t-s)L_2u(x,s)ds,$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $x \in \Omega$, $t > 0$, $\rho > 0$ – постоянная плотность, коэффициенты Ламе λ, μ – положительные постоянные, $Lu = (L_1 + L_2)u = \mu\cdot(\Delta u + \frac{1}{3}\mathrm{grad}\ \mathrm{div} u) + \lambda\cdot\frac{1}{3}\mathrm{grad}\ \mathrm{div} u$ – оператор Ламе теории упругости, Γ_1, Γ_2 – функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды, представимые рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегродифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра. Эти результаты являются обобщением результатов, опубликованных в работах [3] - [6].

Совместная работа с Н. А. Раутиан.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00349а).

Список литературы

[1] Власов В. В., Раутиан Н. А. *Корректная разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости*, Современная математика. Фундаментальные направления. Т.58 (2015), С. 22 – 42.

[2] Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А. *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ*, Современные проблемы математики и механики. Под редакцией В. А. Садовничего. - Том VIII (2011) Математика. Выпуск 1. - М.: Издательство МГУ имени М.В. Ломоносова. 308с.

[3] Власов В. В., Медведев Д. А. *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории*, Современная математика. Фундаментальные направления. Т.30 (2008), С. 3 – 173.

[4] Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С. *Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике*, Современная математика. Фундаментальные направления. Т.39 (2011), С. 36 – 65.

[5] Vlasov V. V., Rautian N. A. *Spectral Analysis and Representations of Solutions of Abstract Integro-differential Equations in Hilbert Space*, Operator Theory: Advances and Applications. V.236 (2014), P. 517 – 535. Springer Basel AG.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ НА ГРУППЕ КОНФОРМНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Волчков В.В., Волчков Вит.В.

Донецкий национальный университет (Донецк)

E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com

Для группы G конформных автоморфизмов единичного круга получено решение проблемы спектрального синтеза для подпространств $\mathcal{U} \subset C^\infty(G)$, инвариантных относительно односторонних G-сдвигов и сопряжений из подгруппы $K = SO(2)$.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Как известно, для любого $g \in G$ существуют и определяются однозначно числа $\tau, z \in \mathbb{C}$, такие, что $|\tau| = 1$, $|z| < 1$ и

$$g(w) = \tau\,\frac{w - z}{1 - \overline{z}w}$$

при всех $w \in \mathbb{D}$. Отождествим элемент $g \in G$ с парой (τ, z).

Пусть ρ, φ – полярные координаты точки $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $s, \kappa \in \mathbb{Z}$ определим функцию $\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}$ равенством

$$\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z) = \rho^{|\kappa|}(1-\rho^2)^\nu F\left(\nu + s + \frac{|\kappa| - \kappa}{2},\, \nu - s + \frac{|\kappa| + \kappa}{2};\, |\kappa| + 1;\, \rho^2\right) e^{i\kappa\varphi},$$

где

$$\nu = \nu(\lambda) = \frac{1 - i\lambda}{2}$$

и $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Имеет место равенство

$$L_G(\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z)\,\tau^s) = \frac{\lambda^2 + 1}{4}\,\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z)\,\tau^s,$$

где L_G – оператор Лапласа на группе G. Обобщая определение функций $\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}$, положим

$$\mathcal{H}^{s,\mu}_{\lambda,\kappa}(z) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\mu \mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathcal{H}^{s,\mu}_{0,\kappa}(z) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{2\mu} \mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z)\Big|_{\lambda=0}.$$

Выделение здесь случая $\lambda = 0$ связано с четностью функции $\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z)$ по переменной λ.

Символом $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}} M$ будем обозначать замыкание множества M в топологическом векторном пространстве $\mathcal{X}$. Пусть также $\mathcal{L}in\, E$ – линейная оболочка заданного множества $E \subset \mathcal{X}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U}$ – ненулевое подпространство в $C^\infty(G)$, инвариантное относительно сдвигов*

$$f(g) \to f(k\,g\,h), \qquad k \in K,\ h \in G.$$

Тогда

$$\mathcal{U} = \mathrm{cl}_{\mathcal{E}(G)}\, \mathcal{L}in\left\{\mathcal{H}^{s,\mu}_{\lambda,\kappa}(z)\tau^s \in \mathcal{U} : \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{Z}_+, s, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Доказательство теоремы 1 основано на развитии теории трансмутационных операторов, предложенной авторами в [1], [2]. Отметим также, что теорема 1 существенно усиливает известный результат Л. Эренпрейса и Ф. Маутнера [3] о спектральном синтезе для биинвариантных подпространств в $C^\infty(G)$.

Список литературы

[1] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. *Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга*// Матем. сб., Т. 199, № 8 (2008), С. 29–60.

[2] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer-Verlag London Limited, New York–London, 2009, 671 pp.

[3] L. Ehrenpreis, F. Mautner. *Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups II*// Trans. Amer. Math. Soc., V. 84 (1957), P. 1–55.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ [1]

Копачевский Н.Д., Якубова А.Р.

ФГАОУ ВО "КФУ им. В.И. Вернадского"(Россия, Симферополь)

E-mail: nikolay-d-kopachevsky.com, tehnotat@mail.ru

1. Рассматривается несимметрическая полуторалинейная форма

$$\Phi_\varepsilon(\eta, u) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \left[\left(\eta, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}, u \right)_{L_2(\Omega)} \right], \qquad (1)$$

заданная на пространстве $H^1(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^m,\ \Gamma := \partial\Omega$ – гладкая, $\varepsilon \in \mathbb{R},\ c_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{1, m}$. Эта форма ограничена и равномерно аккретивна на $H^1(\Omega)$.

Форме (1) отвечает обобщенная формула Грина

$$\Phi_\varepsilon(\eta, u) = \langle \eta, L_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega), \qquad (2)$$

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma\eta := \eta\,|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma),$$

$$\partial_\varepsilon u := \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma - \varepsilon\sigma\gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \sigma := \sum_{k=1}^{m} c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}) \in \mathrm{C}(\Gamma).$$

2. На базе формулы Грина (2) рассматриваются краевые задачи Неймана-Ньютона, Дирихле и другие, а также несамосопряженные спектральные проблемы:
задача Дирихле $\quad L_\varepsilon u = \lambda u \quad$ (в Ω), $\quad \gamma u = 0 \quad$ (на Γ),
задача Неймана-Ньютона $\quad L_\varepsilon u = \lambda u \quad$ (в Ω), $\quad \partial_\varepsilon u = 0 \quad$ (на Γ),
задача Стеклова $\quad L_\varepsilon u = 0 \quad$ (в Ω), $\quad \partial_\varepsilon u = \lambda\,\gamma u \quad$ (на Γ),
задача Стефана $\quad L_\varepsilon u = \lambda u \quad$ (в Ω), $\quad \partial_\varepsilon u = \lambda\,\gamma u \quad$ (на Γ),
задача С.Крейна $\quad L_\varepsilon u = \lambda u \quad$ (в Ω), $\quad \lambda\,\partial_\varepsilon u = \gamma u \quad$ (на Γ),
задача Аграновича $\quad L_\varepsilon u + \lambda u = 0 \quad$ (в Ω), $\quad \partial_\varepsilon u = \mu\,\gamma u \quad$ (на Γ),
задача Чуешова $\quad L_\varepsilon u + \lambda^2 u = 0 \quad$ (в Ω), $\quad \partial_\varepsilon u = \lambda a\,\gamma u$ (на Γ), $a > 0$.

Для этих задач установлены структура и локализация спектра, доказаны свойства полноты и базисности системы корневых элементов.

3. Рассмотрены также начально-краевые задачи, порождающие приведенные спектральные проблемы, получены утверждения об их однозначной разрешимости.

Список литературы

[1] Агранович М. С., *Спектральные свойства задач дифракции*, кн. Обобщенный метод собственных колебаний в задачах дифракции (1977).

[2] Агранович М. С., *Спектральные задачи в липшицевых областях*, Современная математика. Фундаментальные направления. – Том 39 (2011), с. 11-35.

[3] Якубова А.Р., *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные полуторалинейными формами* , Материалы Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и иформатике (2016 г.), с. 102 - 107.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете).

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Кувардина Л.П.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (Россия, Саратов)

E-mail: KuvardinaLP@info.sgu.ru

В докладе рассмотривается интегральный оператор вида

$$Af(x) = \int\limits_0^{p(x)} A(p(x),t)f(t)dt,$$

где $p(x) = \frac{1-x}{ax+1} \quad (a > -1)$; функции $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$, и $A(x,x) = 1$, $A_x(x,t)\big|_{t=x} = 0$.

Впервые операторы такого вида в случае линейной инволюции $p(x) = 1 - x$ были рассмотрены А.П. Хромовым [1], в данной работе рассматриваются операторы более общего вида. Заметим, что такой выбор оператора, использование инволюции $p(x)$, позволяют свести интегральное уравнение для резольвенты Фредгольма оператора к системе двух интегро-дифференциальных уравнений, хотя обычно к конечной системе не сводится. Это является одним из ключевых моментов работы. Исследование этой двумерной краевой задачи позволило выявить структуру резольвенты, получить оценки резольвенты при больших значениях спектрального параметра. Более того, выбор пределов интегрирования в операторе позволил освободиться от требования условия регулярности по Биркгофу граничных условий обратного оператора, что существенно упрощает формулировки результатов. Отметим, что в доказательствах используется метод Коши-Пуанкаре интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра.

Эта работа продолжает исследование интегральных операторов с дробно-линейной инволюцией. Для оператора A автором было доказано существование обратного оператора без дополнительных требований и найден вид обратного оператора. Была установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора A и в тригонометрический ряд Фурье [2].

В докладе рассматривается вопрос о сходимости средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора A, найдены необходимиые и достаточные условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней на всем отрезке $[0,1]$ средних Рисса. Устанавливается аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье, приводятся достаточные условия (условия типа Жордана–Дирихле) разложения функции $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора.

Список литературы

[1] Хромов А.П. *Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования* [Текст]. Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. статей. / М.: АФЦ, 1999. – С. 255-266.

[2] Кувардина Л.П. *О равносходимости спектральных разложений для интегрального оператора с переменным пределом интегрирования* [Текст] // 4 Международный симпозиум. Ряды Фурье и их приложения: Тез. докл. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2006. – С. 32.

О РОСТЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

Кукушкин М.В.

Институт прикладной математики и автоматизации (Россия, Нальчик)

E-mail: kukushkinmv@rambler.ru

Считается известным (например см.[1]), что вполне непрерывное вложение энергетического пространства порожденного положительно определенным оператором в исходное пространство, дает возможность с помощью задания отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов, оценить собственные значения оператора собственными значениями оператора более простого типа. В работе [2] 1977 г. рассмотрена задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами при дробных производных в младших членах. Доказанная в работе [3] 2015 г. полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования, действующего в весовом пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций, дает возможность пренести некоторые классические результаты теории положительно определенных операторов, для операторов полуограниченных снизу. В частности важное значение имеет вопрос о вполне непрерывном вложении энергетического пространства порожденного оператором дробного дифференцирования в исходное пространство.

В данной работе получен результат являющийся следствием вполне непрерывного вложения энергетического пространства порожденного дифференциальным оператором второго порядка с дробными производными в младших членах. Доказана теорема, позволяющая охарактеризовать рост собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах. Особое значение имеет ослабление условия непрерывности, наложенного в [2] на коэффициенты при дробных производных.

Будем полагать: $\alpha \in (0,1),\ x \in (a,b) = \Omega \subset \mathbb{R}$, а также следовать обозначениям [4], [5]. Интегрирование понимается в смысле Лебега. Обозначим через λ_n собственные значения оператора задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах

$$(Au)(x) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x)D^{\alpha}_{ax}u + r(x)D^{\alpha}_{bx}u, \tag{1}$$

$$u(x) \in C^2(\bar{\Omega}),\ u(\partial\Omega) = 0,$$

с следующими предположениями относительно коэффициентов

$$p(x) \in C^1(\bar{\Omega}),\ p(x) \geq p_0 > 0,\ q(x) = D^{-\alpha}_{bx}\varphi_1,\ r(x) = D^{-\alpha}_{ax}\varphi_2,$$
$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in L_q(\Omega),\ 1 < q < 1/\alpha,\ \ \varphi_1(x), \varphi_2(x) \geq h > 0.$$

Имеет место теорема

Теорема. *Для собственных значений оператора задачи* (1) *имеет место оценка*

$$\lambda_n \geq \frac{a_0\pi^2}{(b-a)^2}n^2 + h,\ n = 1, 2, \dots.$$

Список литературы

[1] Mikhlin S.G. *Linear partial differential equations.* M .: Higher School, (1977). -431 pp.

[2] Nahushev A.M. *Sturm - Liouville problem for ordinary second order differential equation with fractional derivatives in the junior member.* Reports of the USSR Academy of Sciences. V. 234, № 2, pp.308-311.

[3] Kukushkin M.V. *About the weighted spaces of fractionally differentiable functions.* Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics Physics. №6(227),42. (2016), 60-70 pp.

[4] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integrals and derivatives of fractional order, and some applications.* Minsk "Science and Technology"(1987). -688 pp.

[5] Nahushev A.M. *Fractional calculus and its application.* M .: FIZMATLIT, 2003.-272 pp

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

Рыхлов В.С.

Саратовский госуниверситет (Россия, Саратов

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

На отрезке [0,1] рассмотрим пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов третьего порядка, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y''' - (1+i)\lambda y'' + (2+i)\lambda^2 y' - 2\lambda^3 y \tag{1}$$

и двухточечными нераспадающимися краевыми условияммиі

$$\begin{array}{l} U_1(y) \equiv U_{10}(y) + U_{11}(y) := y(0) - 5y(1) = 0, \\ U_2(y) \equiv U_{20}(y) + U_{21}(y) := y'(0) - (2+6i)y'(1) = 0, \\ U_3(y) \equiv U_{30}(y) + U_{31}(y) := y''(0) + 10y''(1) = 0. \end{array} \tag{2}$$

Характеристическое уравнение $\omega^3 - (1+i)\omega^2 + (2+i)\omega - 2 = 0$ пучка имеет корни $\omega_1 = -i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2i$ и, следовательно, ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ состоит из функций $y_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}$, $y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x}$, $y_3(x,\lambda) = e^{2i\lambda x}$.

Введем следующие вектор-столбцы при $j = \overline{1,3}$ (используются обозначения из [1])

$$\begin{aligned} &H_j(\lambda) := (U_1(y_j), U_2(y_j), U_3(y_j))^T, \\ &V_j(\lambda) := (U_{10}(y_j), U_{20}(y_j), U_{30}(y_j))^T, \\ &W_j(\lambda) := e^{-\lambda\omega_j}(U_{11}(y_j), U_{21}(y_j), U_{31}(y_j))^T. \end{aligned}$$

Для характеристического определителя пучка (1)–(2) справедливо представление

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &:= \det(U_i(y_j))_{i,j=1} = \det\left|H_1(\lambda)H_2(\lambda)H_3(\lambda)\right| = \\ &= -\lambda^3(3+9i)\Big(1 - 2e^{\lambda} + (5-6i)e^{2i\lambda} - (5+15i)e^{i\lambda} - (55+15i)e^{(1+2i)\lambda} + (100+300i)e^{(1+i)\lambda}\Big). \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемый пучок является сильно нерегулярным [2], [1] (или не нормальным [3]). Естественно возникает вопрос о кратной полноте его корневых функций (к.ф.).

Рассмотрим следующую порождающую функцию для к.ф. пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Gamma(\lambda) & H_1(\lambda) & H_1(\lambda) & H_3(\lambda) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

зависящую от вектор-столбца $\Gamma(\lambda)$, который является параметром. Функции вида (3) играет важную роль при доказательстве полноты системы к.ф. пучков, аналогичных $L(\lambda)$.

Применяя результаты, изложенные в [1], получим (в обозначениях [1]), что имеются только две линейно независимые порождающие функции $y(x,\lambda,V_3(\lambda))$ и $y(x,\lambda,W_1(\lambda))$, для которых их характеристические многоугольники совпадают с характерисьтическими многоугольником $\Delta(\lambda)$.

Используя эти порождающие функции, так же, как и в [4], получаем следующий результат:

Теорема 1. *Система корневых функций пучка $L(\lambda)$ 2-кратна полна в пространстве $L_2^2[0,1] := L_2[0,1] \oplus L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.*

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K).

Список литературы

[1] Рыхлов В. С., *О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами*, Таврический вестник информатики и математики, № 1(26) (2015), с. 69—86.

[2] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, М.: Наука, 1969, 526 с.

[3] Шкаликов А. А.,*Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*, Тр. семин. им. И.Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та, № 9 (1983), с. 190–229.

[4] Rykhlov V. S. *Eigenfunction completeness for a third-order ordinary differential bundle of operators*, Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya, Vol.3, No.3/4 1996, pp. 406–411.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА В ПРИЛОЖЕНИИ К НЕКОТОРЫМ ПРОБЛЕМАМ ОКЕАНОЛОГИИ

Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.

ФИЦ ИУ РАН, ИО РАН (Россия, Москва)

E-mail: sskorokhodov@gmail.com, kuzmina@ocean.ru

На отрезке $z \in [-1, 1]$ рассматривается спектральная задача для уравнения 4-го порядка, аналогичного уравнению Орра–Зоммерфельда,

$$\frac{1}{ikR}\,\varphi''''(z) - (U(z)-c)\varphi''(z) + U''(z)\varphi(z) = 0\,, \tag{1}$$

где $\varphi(z)$ – искомая функция, k и R некоторые параметры, $U(z) = 1-z^2$ соответствует стационарному профилю Пуазейля, а c – спектральный параметр. Два краевых условия имеют вид

$$\varphi''(z) = 0\,, \quad z = \pm 1, \tag{2}$$

а вторые два условия связывают функцию и производные в граничных точках,

$$\frac{1}{ikR}\,\varphi'''(z) - (1-z^2-c)\varphi'(z) - 2z\varphi(z) = 0, \quad z = \pm 1. \tag{3}$$

Задача (1)—(3) соответствует эволюции малых возмущений давления в горизонтальном геострофическом течении с учетом вертикальной диффузии плотности и возникает в задачах описания образования интрузий в океане.

Решение модельного уравнения (1) сталкивается со значительными трудностями, связанными с тем, что оператор задачи несамосопряжен, при больших числах Рейнольдса R ($\sim 10^3 - 10^4$) он является сингулярно возмущенным, а сама функция $\varphi(z)$ комплекснозначна.

Для эффективного решения поставленной задачи был разработан численный метод, представляющий четные и нечетные аналитические решения в виде разложений в точках $z = 0$ и $z = 1$ с последующей их сшивкой во внутренней точке $z_* \in (0, 1)$. Погрешность расчетов полученных спектральных портретов параметра c контролировалась как сравнением с аналитическими решениями, полученными в некоторых частных случаях, так и различными численными методами и достигала величины 10^{-30}.

На основе численных экспериментов были получены спектральные значения c, соответствующие как устойчивым (затухающим со временем, т.е. таким, для которых $Im(c) < 0$), так и неустойчивым (возрастающим со временем, т.е. для которых $Im(c) > 0$) течениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №$16-01-00781$ и №$15-05-01479$) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3.

DIRAC SYSTEM WITH SINGULARITIES IN INTERIOR POINTS

Oleg Gorbunov, Vjacheslav Yurko

Saratov University (Saratov, Russia)

E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Consider the boundary value problem $L = L(Q_\omega(x), Q(x), \alpha, \beta)$ for the Dirac system on a finite interval with N regular singularities inside the interval:

$$BY' + \Big(Q_\omega(x) + Q(x)\Big)Y = \lambda Y, \quad 0 < x < \pi,$$

$$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)Y(0) = (\cos\beta,\ \sin\beta)Y(\pi) = 0,$$

where

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{pmatrix},$$

$Q_\omega(x) = \dfrac{\mu_k}{x-\gamma_k}\begin{pmatrix} \sin 2\eta_k & \cos 2\eta_k \\ \cos 2\eta_k & \sin 2\eta_k \end{pmatrix}$ for $x \in \omega_{k+1/2} \cup \gamma_{k+1/2},\ k = \overline{1, N}$.

Here $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_N < \pi,\ \omega_p = (\gamma_p,\ \gamma_{p+1}),\ \gamma_{k+1/2} = (\gamma_{k+1} + \gamma_k)/2,\ k = \overline{1, N-1},\ \gamma_{1/2} = \gamma_0 = 0,\ \gamma_{N+1/2} = \gamma_{N+1} = \pi$, $q_j(x)$ are complex-valued functions, and μ_k are complex numbers. Let for definiteness, $\alpha,\ \beta,\ \eta_k \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\operatorname{Re}\mu_k > 0,\ \mu_k + 1/2 \notin \mathbf{N}$. Let $q_j(x)$ be absolutely continuous on $[0,\pi]$ and $|q_j(x)| \prod\limits_{k=1}^{N} |x-\gamma_k|^{-2Re\mu_k} \in L(0,\pi)$. Let $\{a_k,\ \lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ be spectral data for L (see [1]).

Inverse problem 1. Given $\{a_k,\ \lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, construct L, i.e. $Q(x),\ Q_\omega(x),\ \alpha,\ \beta$.

Theorem 1. *The specification of the spectral data uniquely determines L.*

A constructive procedure for the solution of this nonlinear inverse problem were obtain, along with necessary and sufficient conditions for the global solvability of the inverse problem [1].

Acknowledgment. This work was supported by Grants 1.1436.2014K and 2014/203-1617 of the Russian Ministry of Education and Science and by Grant 16-01-00015 of Russian Foundation for Basic Research.

References

[1] Gorbunov O.B., Yurko V.A., Shieh, C.-T. *Spectral analysis of the Dirac system with a singularity in an interior point*, arXiv:1410.2020v1 [math.SP], 17pp.

ON INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL PENCILS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Vjacheslav Yurko

Saratov University (Saratov, Russia)

E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Consider the differential equation and the linear forms

$$y''(x) + (\rho^2 + p(x)\rho + q(x))y(x) = 0, \quad x \in (0,T), \tag{1}$$

$$U_j(y) := H_j y(0) + \int\limits_0^T y(t)d\sigma_j(t), \quad j = 1, 2.$$

Here $q(x) \in L(0,T), p(x) \in AC[0,T]$ are complex-valued functions, $\sigma_j(t)$ are complex-valued functions of bounded variations and are continuous from the right for $t \geq 0$. For definiteness we assume that $H_1 \neq 0$. Let $X_k(x,\rho), k = 1, 2$, be the solutions of Eq. (1) under the initial conditions $X_1(0,\rho) = X_2'(0,\rho) = 1,\ X_1'(0,\rho) = X_2(0,\rho) = 0$. Consider the boundary value problem (BVP) L_0 for Eq. (1) with the conditions

$$U_1(y) = U_2(y) = 0.$$

Denote $\omega(\rho) := \det[U_j(X_k)]_{j,k=1,2}$, and assume that $\omega(\rho) \not\equiv 0$. The zeros $\Xi = \{\xi_n\}$ of $\omega(\rho)$ coincide with the eigenvalues of L_0. Denote $V_j(y) := y^{(j-1)}(T),\ j = 1, 2$. Consider the BVP L_j, $j = 1, 2$, for Eq. (1) with the conditions $U_j(y) = V_1(y) = 0$, and denote by $\Lambda_j = \{\rho_{nj}\}$ the spectrum of L_j.

Let $\Phi(x, \rho)$ be the solution of Eq. (1) under the conditions $U_1(\Phi) = 1$, $V_1(\Phi) = 0$. Denote $M(\rho) := U_2(\Phi)$. The function $M(\rho)$ is called the Weyl-type function. In contrast to the classical Sturm-Liouville operators, here the specification of the Weyl-type function $M(\rho)$ does not uniquely determine the potential. In our case the inverse problem is formulated as follows. Let U_j be known and fixed.

Inverse problem 1. Let $\Lambda_1 \cap \Xi = \emptyset$ (condition S). Given $M(\rho)$ and $\omega(\rho)$, construct the potentials $q(x), p(x)$, $x \in (0, T)$.

Theorem 1. *Under condition S, the specification of $M(\rho)$ and $\omega(\rho)$ uniquely determines the potentials q and p.*

If condition S does not hold, then the specification $M(\rho)$ and $\omega(\rho)$ does not uniquely determine the potential, and we have to specify an additional spectral information [1].

Let $\Lambda_{11} := \{\rho^1_{n1}\}$ be the spectrum of the the BVP L_{11} for Eq. (1) with the conditions $U_1(y) = V_2(y) = 0$.

Inverse problem 2. Given $\{\rho_{n1}, \rho^1_{n1}\}$, construct $q(x), p(x)$, $x \in (0, T)$.

Theorem 2. *The specification of $\{\rho_{n1}, \rho^1_{n1}\}$, uniquely determines q and p.*

Acknowledgment. This work was supported by Grants 1.1436.2014K and 2014/203-1617 of the Russian Ministry of Education and Science and by Grant 16-01-00015 of Russian Foundation for Basic Research.

References

[1] Yurko V.A., Yang C-F. *Recovering differential operators with nonlocal boundary conditions*, arXiv:1410.2017v1 [math.SP], 2014, 12pp.

Секция 3. Обыкновенные дифференциальные и дифференциально-операторные уравнения

МУЛЬТИ-НЕЯВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОДУ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Васильева Т.А., Васильев Е.И.

Волгоградский государственный Университет (Россия, Волгоград)

E-mail: tatiana_vas@mail.ru

В сложных прикладных задачах часто встречаются жесткие системы дифференциальных уравнений, в которых характерные скорости изменения отдельных компонент очень сильно отличаются друг от друга. Для численного решения таких задач необходимо применять методы с повышенной степенью устойчивости. В работе [1] предложены и рассмотрены мульти-неявные методы со второй производной (mISD, m-Implicit with Second Derivative). В классических многошаговых методах используется информация в нескольких предшествующих точках. В противоположность этому в мульти-неявном методе используют несколько последующих точек, для каждой из которых записывается отдельное разностное уравнение. Использование вторых производных позволяет существенно повысить порядок аппроксимации метода. Построены и протестированы симметричные A-устойчивые методы 6-го, 8-го и 10-го порядка аппроксимации. В работе [2] построены и исследованы расширенные семейства 2ISD и 3ISD методов, в которых найдены L-устойчивые методы. Эти методы обладают повышенной степенью устойчивости и предпочтительны для расчетов сильно неравновесных процессов. В неявных методах для жестких систем для вычисления решений в последующих точках обычно используется итерационный метод Ньютона, сходимость которого сильно зависит от начального приближения. Этот фактор не позволяет использовать все преимущества абсолютно устойчивых методов для сильно нелинейных задач. При большом шаге интегрирования метод Ньютона может не сходиться. Устранить этот недостаток позволяют специальные алгоритмы автоматического контроля и изменения шага интегрирования в процессе решения задачи.

В данном докладе предложены алгоритмы автоматического контроля шага интегрирования для жестких систем дифференциальных уравнений, основанные на использовании мульти-неявных методов высокой точности. Продемонстрирована эффективность алгоритма автоматического выбора шага на примере сложной практической задачи неравновесной кинетики химических реакций при взрыве водородно-кислородной смеси, включающей 6 компонет (H_2, O_2, H, O, OH, H_2O).

Список литературы

[1] Vasilyeva T., Vasilev E., *High order implicit method for ODEs stiff systems*,Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 8, N 1, 2001 P. 165-180.

[2] Васильев Е.И., Васильева Т.А., Киселева М.Н., *Расширенное семейство дважды неявных методов для жестких систем дифференциальных уравнений*, Вестник ВолГУ, Сер. 1, Математика. Физика., N 3 (28), 2015. С. 34-44.

ПОТОКИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ И ТЕОРИЯ АНОСОВА-ВЕЙЛЯ

Гринес В.З.

НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: vgrines@yandex.ru

Теория Аносова-Вейля включает в себя исследования асимптотического поведения прообразов кривых без самопересечений, расположенных на замкнутой поверхности, отличной от сферы, на ее универсальной накрывающей. Начало этой теории восходит к работам Андре Вейля начала 30-х годов прошлого века, который предложил альтернативное определение числа вращения Пуанкаре для потоков без состояния равновесия на торе. Дальнейший импульс идеям Вейля был дан спустя 30 лет Д.В. Аносовым, который предсказал важную роль так называемых соасимптотических геодезических для описания асимптотических свойств кривых без самопересечений. В частности, им было уделено особое внимание на нахождение условий наличия или отсутствия свойств ограниченного отклонения кривой на поверхности от соответствующей геодезической.

В докладе будет описано применение теории Аносова-Вейля для топологической классификации потоков на поверхностях, содержащих незамкнутые рекуррентные траектории.

Благодарности. Доклад подготовлен в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект топологические методы в динамике ТЗ 98) , а также при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а и РНФ 14-41-00044.

СУММИРУЕМОСТЬ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ОДНОЧЛЕННЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Даровская К.А.

RUDN University (Россия, Москва)

E-mail: k.darovsk@gmail.com; darovskaya_ka@pfur.ru

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$Au = -a_0(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) \quad (x \in (0,1)). \tag{1}$$

Здесь a_i $(i = 0, 1, 2)$ — непрерывные вещественнозначные функции и $a_0(x) \geq k > 0$ $(x \in [0,1])$. Будем предполагать, что вблизи концов интервала $(0,1)$ коэффициент a_0 принадлежит W^1_∞, где $W^1_\infty(a,b)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $v(x)$ $(x \in [a,b])$, таких, что $v' \in L_\infty(a,b)$.

В качестве граничных условий рассмотрим следующие операторы

$$B_\rho u = \int\limits_0^1 h_\rho(x)u^{(j_\rho)}(x)dx \quad (\rho = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь параметр j_ρ $(\rho = 1, 2)$ может принимать значения 0 или 1. Веса h_ρ $(\rho = 1, 2)$ — ненулевые линейно независимые вещественнозначные функции, принадлежащие пространству Гельдера C^α $(1/2 < \alpha \leq 1)$ вблизи концов интервала $(0,1)$. Введем определитель, зависящий от значений этих функций в точках 0 и 1 :

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} h_1(0) & h_1(1) \\ h_2(0) & h_2(1) \end{vmatrix}.$$

Введем оператор $A_B \colon L_2(0,1) \supset \mathcal{D}(A_B) \to L_2(0,1)$ с областью определения $\mathcal{D}(A_B) = \left\{u \in W_2^2(0,1) : B_\rho u = 0, \rho = 1, 2\right\}$, действующий по правилу $A_B u = Au$ $(u \in \mathcal{D}(A_B))$.

Пусть $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — система векторов, составленная из функций жорданова базиса корневых подпространств оператора A_B. Пусть $f_0 \in L_2(0,1)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_s c_s(x)e_s. \tag{3}$$

Определение. Будем говорить, что ряд (3) суммируем к f_0 по методу Абеля порядка δ, если для этого ряда существует подпоследовательность частичных сумм $S_{N_\nu} = \sum\limits_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} c_s(x)e_s$, сходящаяся в $L_2(0,1)$ при всех $x > 0$, такая, что $u(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} S_{N_\nu}$ и $\lim_{x\to+0} u(x) = f_0$.

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\Delta_h \neq 0$. Тогда для любого $f_0 \in \mathcal{D}(A_B)$ ряд (3) по корневым функциям оператора A_B суммируем в $L_2(0,1)$ к f_0 по методу Абеля порядка δ, где $\delta > 1/2$.*

Доказательство теоремы для случая граничных условий, содержащих лишь саму неизвестную функцию, может быть найдено в [3]. Доказательство для остальных случаев строится похожим образом (см. также [1, 2]), модифицируясь соответственно результатам, полученным в [4, 5].

Настоящая работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, проект № 1.1974.2014/K.

Список литературы

[1] Agmon S., *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. 15:2 (1962), 119–147.

[2] Шкаликов А.А., *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями*, Функц. анализ и его прил. 10:4 (1976), 93–94.

[3] Подъяпольский В.В., *Суммируемость по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи с интегральными условиями*, Мат. заметки 65:5 (1999), 797–800.

[4] Скубачевский А.Л., *Неклассические краевые задачи. I*, Современная математика. Фундаментальные направления 26 (2007), 3–132.

[5] Даровская К.А., Скубачевский А.Л., *Об одной спектральной задаче с интегральными условиями*, Труды семинара им. И. Г. Петровского 28 (2011), 147–160.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Закора Д.А.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (РФ, Симферополь),
Воронежский государственный университет (РФ, Воронеж)

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

Пусть H, H_l $(l=\overline{0,m})$ гильбертовы пространства. Пусть оператор A самосопряженный и положительно определенный в H, $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$ $(l=\overline{0,m})$, операторы $Q_0^*Q_0$ и $Q_q^*Q_q$ (при некотором q) положительно определены в H. Пусть $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_m$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus \big(\oplus_{l=0}^m H_l\big)$ определим оператор

$$\mathcal{A} := \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}),$$

$$\mathcal{Q} := \big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m\big)^{\tau}, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \Big\{\xi := (\zeta; \zeta_0; \zeta_1; \ldots; \zeta_m)^{\tau} \in \mathcal{H} \big|\, \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \sum_{l=0}^m Q_l^* \zeta_l \in \mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.$$

Теорема. *Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой сильно непрерывной полугруппы операторов в $\mathcal{H}$.*

Доказанная теорема применяется к исследованию экспоненциальной устойчивости сильных решений некоторых задач из механики вязкоупругих сплошных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

ВАРИАНТ ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО СИМПЛЕКСА

Иванисенко Н.С.

ДонНУ (Украина, Донецк)

E-mail: Ivanisenko.n.s@gmail.com

Пусть $\mathbb{R}^n$– вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$– группа изометрий $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) \colon \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющая A внутри B, и $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$ – шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в B, если из того, что комплекснозначная локально суммируемая функция в B, для которой $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ для всех $\lambda \in \operatorname{Mot}(A, B)$, следует, что функция f равна нулю почти всюду в B.Совокупность всех множеств Помпейю в B будем обозначать через $Pomp(B)$. Классическая проблема об описании класса $Pomp(\mathbb{R}^n)$ изучалась во многих работах, см. обзоры [1], [2] с обширной библиографией.

Возникает вопрос, если некоторое множество $A \in Pomp(\mathbb{R}^n)$ при каких значениях R будет $A \in Pomp(\mathbb{B}_R)$. Для любого множества $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ это имеет место, если размеры $\mathbb{B}_R$ достаточно велики по сравнению с A, см. [3]. В связи с этим Волчковым В.В. поставлена следующая

Проблема. *Для данного A найти* $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(B_R)\}$.

Основные результаты по данной проблеме изложены в [4]. В частности, для многогранников в $\mathbb{R}^n$ была получена верхняя оценка величины $\mathcal{R}(A)$. Для правильного симплекса $\widetilde{S}_4$ в четырехмерном пространстве с вершинами $z_1(1,0,0,0)$, $z_2(0,1,0,0)$, $z_3(0,0,1,0), z_4(0,0,0,1)$, $z_5((1-\sqrt{5})/4$, $(1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4$, $(1-\sqrt{5})/4)$ она может быть уточнена с помощью следующей формулы, аналогичной формуле Остроградского.

Теорема 1. *Пусть произвольная функция $f \in \mathbb{C}^9(\widetilde{S}_4)$, тогда выполняется следующее равенство:*

$$\int\limits_{\widetilde{S}_4} (D_1^* f)(y)dy = \sqrt{5}G_{1,2} + \sqrt{5}\sum_{i=2}^{5}(\widetilde{G}_i f)(z_i),$$

где $q_1^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_2$, $q_2^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_3$, $q_3^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_4$,
$q_4^* = \partial/\partial y_2 - \partial/\partial y_3$, $q_5^* = \partial/\partial y_2 - \partial/\partial y_4$, $q_6^* = \partial/\partial y_3 - \partial/\partial y_4$,
$q_7^* = ((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_1) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_2) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_4)$,
$q_8^* = ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_1) + ((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_2) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_4)$,
$q_9^* = ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_1) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_2) + ((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_3) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_4)$,
$q_{10}^* = ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_1) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_2) + ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3) + ((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_4)$,
$D_1^* = q_4^* q_5^* q_8^* q_6^* (-q_2^*) q_9^* q_3^* q_{10}^* q_7^*$, $L_1 = (-q_1^*) q_5^* q_8^* (-q_2^* q_9^* (q_{10}^* + q_3^*) - q_6^* q_9^* q_{10}^* - q_6^* q_2^* q_3^*)$,
$L_2 = -(-q_1^*) q_4^* q_8^* (-q_2^*) q_9^* * (q_{10}^* + q_3^*)$, $L_3 = q_4^* q_5^* q_8^* q_6^* q_9^* q_{10}^*$, $L_4 = (-q_1^*) q_4^* q_5^* q_6^* q_2^* q_3^*$,
$\widetilde{G}_2 = (L_1 + L_2 + L_4)/q_1$, $\widetilde{G}_3 = L_3/q_1$, $\widetilde{G}_4 = -L_2/q_1$, $\widetilde{G}_5 = -L_4/q_1$,
$G_{1,2} = \int_0^1 (L_3 f)(1-t, t, 0, 0)dt$.

Список литературы

[1] Zalcman L., *A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation dy solutions of partial differential equations*, ed. B. Fuglede et al. (1992), P. 185–194.

[2] Zalcman L. *Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem' in Radon Transforms and Tomography*, Contemp. Math. № 278 (2001), P. 69–74.

[3] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V., *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, Springer (2009), 671 p.

[4] Volchkov V.V., *Integral Geometry and Convolution Equations*,Kluwer Academic Publishers (2013), 454 p.

О ДИНАМИКЕ ЭНДОМОРФИЗМОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОДНОМЕРНЫМИ БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Куренков Е.Д.

НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: eugene2402@mail.ru

Под C^k-эндоморфизмом гладкого замкнутого многообразия M^n понимается гладкое отображение класса C^k, $k \geqslant 1$, которое не является, вообще говоря, взаимно-однозначным.

Хорошо известна ключевая роль понятий гиперболического множества и аксиомы A, введенных Д.В. Аносовым и С. Смейлом для исследования различных типов устойчивости диффеоморфизмов на многообразиях, в частности для установления необходимых и достаточных условий структурной устойчивости. В работах [1], [2] аналогичные понятия были введены для эндоморфизмов.

Следуя [2], инвариантное множество Λ эндоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется гиперболическим, если существуют константы $C > 0$, $0 < \mu < 1$ такие, что для любой частной траектории $\bar{x}$ точки $x \in \Lambda$ ($\bar{x} = \{x_i \in \Lambda \mid x_0 = x, f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}\}$) существует разложение касательного пространства $T_{\bar{x}}M^n$ в прямую сумму $T_{\bar{x}}M^n = E^s_{\bar{x}} \oplus E^u_{\bar{x}}$, инвариантное относительно касательного отображения $Df\colon T_{\bar{x}}M^n \to T_{\bar{x}}M^n$, и для которого верны следующие неравенства:

(1) $||Df^k(v)|| \leqslant C\mu^k||v||$, для любых $k \geqslant 0$, $v \in E^s_{\bar{x}}$;

(2) $||Df^k(v)|| \geqslant (1/C)\mu^{-k}||v||$, для любых $k \geqslant 0$, $v \in E^u_{\bar{x}}$.

Эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ удовлетворяет аксиоме A, если выполнены следующие условия:

(1) неблуждающее множество Ω_f — гиперболично и не содержит критических точек;
(2) множество периодических точек Per_f эндоморфизма f плотно в неблуждающем множестве Ω_f.

В работе [2] было показано, что для эндоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A, имеет место теорема о спектральном разложении, утверждающая, что неблуждающее множество такого эндоморфизма состоит из объединения замкнутых непересекающихся базисных множеств, каждое из которых содержит транзитивную орбиту.

Пусть Λ — базисное множество эндоморфизма f, тогда пара чисел $(\dim E^u_{\tilde{x}}, \dim E^s_{\tilde{x}})$ не зависит от выбора частной траектории, принадлежащей базисному множеству, и называется типом базисного множества.

В настоящем докладе приводятся достаточные условия того, что базисное множество эндоморфизма двумерной поверхности является аттрактором или репеллером и устанавливается динамика ограничения эндоморфизма на такое множество.

Теорема 1. *Пусть базисное множество Λ имеет тип $(1,1)$ и является одномерным подмногообразием без края. Тогда:*

(1) *Λ является аттрактором эндоморфизма f;*
(2) *каждая компонента связности Λ является гладко вложенной окружностью;*
(3) *существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности Λ является растягивающим эндоморфизмом.*

Теорема 2. *Пусть базисное множество Λ имеет тип $(2,0)$ и является одномерным подмногообразием без края. Тогда:*

(1) *Λ является репеллером;*
(2) *существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности Λ является растягивающим эндоморфизмом.*

Автор благодарит В.З. Гринеса за постановку задачи и внимание к работе.
Благодарности. Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а.

Список литературы

[1] Mane R., Pugh C., *Stability of endomorphisms*, Lecture Notes in Math 486 (1975), 175-184
[2] Przytycki F., *Anosov endomorphisms*, Stud. Math. 58 (1976), 249-285

СИМВОЛИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Осипенко Г.С.

Филиал МГУ в Севастополе (Россия, Севастополь)
E-mail: george.osipenko@mail.ru

Пусть $f : M \to M$ является гомеоморфизмом компактного многообразия M. Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ является ε-траекторией (или псевдотраекторией), если расстояние между образом $f(x_i)$ и x_{i+1} меньше чем ε: $\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ для любого i. Если при этом последовательность $\{x_i\}$ является периодической, то она называется периодической ε-траекторией, а точки x_i называются ε-периодическими. Следует подчеркнуть, что точная траектория системы редко известна на практике, в действительности мы работаем с ε-траекториями для достаточно малых положительных ε.

Пусть $C = \{M(1), ..., M(n)\}$ есть конечное покрытие многообразия M замкнутыми подмножествами, $M(i)$ будем называть ячейкой индекса i.

Определение. *Пусть G является ориентированным графом с вершинами $\{i\}$ соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром (дугой) $i \to j$ тогда и только тогда, когда*

$$f(M(i)) \bigcap M(j) \neq \emptyset.$$

[0]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, грант N 16-01-00452).

Граф G называется **символическим образом** *отображения f для покрытия C.*

Символический образ является геометрическим средством для дискретизации динамической системы. Исследование символического образа позволяет получить полезную информацию о глобальной структуре динамики системы. Символический образ зависит от покрытия C, изменение которого меняет символический образ. Существование ребра $i \to j$ гарантирует существование точки x в ячейке $M(i)$ такой, что ее образ $f(x) \in M(j)$. Другими словами, ребро $i \to j$ является следом перехода $x \to f(x)$, где $x \in M(i),\ f(x) \in M(j)$.

Бесконечная в обе стороны последовательность $\{z_k\}$ вершин графа G называется допустимым путем (или просто путем), если для каждого k граф G содержит ребро вида $z_k \to z_{k+1}$. Пусть $diamM(i)$ есть диаметр ячейки $M(i)$ и $d = diam(C) = \max_i diamM(i)$ назовем диаметром покрытия C. Существует естественное соответствие между допустимыми путями на символическом образе и ε-траекториями отображения f.

Теорема 1 (Свойство отслеживания). *1. Если последовательность $\{z_k\}$ есть допустимый путь на символическом образе G, тогда существует последовательность точек $\{x_k\},\ x_k \in M(z_k)$, которая является ε-траекторией f для любого $\varepsilon > d$. В частности, если последовательность $\{z_1,\ z_2, ...,\ z_p = z_0\}$ является p-периодической, тогда ε-траектория $\{x_1,\ x_2, ...,\ x_p = x_0\}$ является p-периодической.*

2. Существует $\delta > 0$ такое, что, если последовательность точек $\{x_k\}$ является ε-траекторией, $\varepsilon < \delta$ и $x_k \in M(z_k)$, тогда последовательность $\{z_k\}$ является допустимым путем на символическом образе G. В частности, если ε-траектория $\{x_1, x_2, ..., x_p = x_0\}$ является p-периодической, тогда $\{z_1, z_2, ..., z_p = z_0\}$ является p-периодическим путем на G.

Грубо говоря, допустимый путь есть след ε-траектории и наоборот. Таким образом, допустимые пути на символическом образе можно рассматривать как кодировку псевдотраекторий.

Доклад описывает зависимость глобальной структуры динамической системы и структуры символического образа. Описан способ локализации цепно рекуррентных множеств, аттракторов, их областей притяжения и фильтрации системы. Представлен метод вычисления различных параметров системы, таких как энтропия, показатели Ляпунова, инвариантные меры. Показано как с помощью символического образа оценивается гиперболичность хаотических множеств.

Список литературы

[1] George Osipenko, *Dynamical systems, Graphs, and Algorithms*, Lectures Notes in Mathematics, v. 1889 (2007), 283 pages.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ МОРСА-СМЕЙЛА

Починка О.В.

НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Динамические системы Морса-Смейла занимают особое место в качественной теории, поскольку описывают устойчивые регулярные процессы. Такие системы появляются в качестве математических моделей в разных областях естествознания (физике, химии, биологии и др.), что является мотивацией к их качественному исследованию и, прежде всего, к получению топологической классификации. В докладе будет представлена ретроспектива результатов по топологической классификации потоков и каскадов Морса-Смейла, начиная с классической работы А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина “Rough systems” и заканчивая современными работами и перспективами дальнейших исследований.

Благодарности. Доклад подготовлен в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект топологические методы в динамике ТЗ-98), а также при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 15-01-03687-а и 16-51-10005-Ко_а.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Шамолин М.В.

МГУ имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация, Москва)

E-mail: shamolin@rambler.ru

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем на касательном расслоении к двумерным гладким многообразиям. К такого рода задачам приводятся системы из динамики (маломерного или многомерного) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил, а также задачи динамики точки в силовых полях на конечномерной сфере. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств.

Ранее [1, 2] были изучены системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Приводился достаточно общий вид таких систем третьего порядка, которые допускают наличие трансцендентных первых интегралов.

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. В работе тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности. При этом исследование начинается для систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии некоторых неконсервативных силовых полей.

Ранее автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [2, 3] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Далее была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-00848-а).

Список литературы

[1] Шамолин М.В. *Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил*, Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. Т. 125 (2013), 3–251.

[2] Трофимов В.В., Шамолин М.В. *Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем*, Фунд. и прикл. мат. Т. 16. Вып. 4 (2010), 3–229.

ДИНАМИКА ТРЕХМЕРНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ОДНОМЕРНЫМИ БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ, ПРОСТОРНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ НА 2-ТОРАХ

Шиловская А.А.

ННГУ им.Н.И. Лобачевского (РФ, Нижний Новгород)

E-mail: a.shilovskaia@gmail.com

В докладе рассматривается класс G структурно устойчивых диффеоморфизмов, заданных на трехмерном замкнутом многообразии M^3 и удовлетворяющих следующим условиям:

(1) неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ расположено на объединении $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$ конечного числа $k \geq 2$ попарно непересекающихся f-инвариантных ручно вложенных в M^3 двумерных торов;

(2) каждый тор T_i содержит в точности одно одномерное просторно расположенное базисное множество Ω_i диффеоморфизма f;

(3) каждая компонента связности дополнения $T_i \setminus \Omega_i$ содержит в точности одну периодическую точку диффеоморфизма f.

Хорошо известно [1], что диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ является структурно устойчивым, если он удовлетворяет аксиоме A С. Смейла (которая заключается в гиперболичности неблуждающего множества $NW(f)$ и плотности в нем множества периодических точек) и удовлетворяет строгому условию трансверсальности.

В силу теоремы о спектральном разложении С. Смейла неблуждающее множество диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A, состоит из объединения замкнутых непересекающихся базисных множеств, каждое из которых содержит транзитивную орбиту.

Напомним, что пара чисел $(dim W^u_x, dim W^s_x)$ не зависит от выбора точки x, принадлежащей базисному множеству Ω_i, и называется его типом.

Напомним также, что базисное множество диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A, называется растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), если его размерность совпадает с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек. Одномерный аттрактор (репеллер) всегда является растягивающимся (сжимающимся). Для диффеоморфизма из рассматриваемого класса G аттрактор (репеллер) имеет тип $(1, 2)$ ($(2, 1)$). Если же одномерное базисное множество не является ни растягивающимся аттрактором, ни сжимающимся репеллером, то оно является седловым. При этом, если его тип есть $(2, 1)$, то оно принадлежит объединению неустойчивых многообразий его точек, а если его тип есть $(1, 2)$, оно принадлежит объединению устойчивых многообразий его точек.

Основным результатом настоящего доклада является следующая теорема.

Теорема 1. *Неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма $f \in G$ либо содержит $\frac{k}{2}$ одномерных аттракторов и $\frac{k}{2}$ седловых базисных множеств типа $(2, 1)$, либо содержит $\frac{k}{2}$ одномерных репеллеров и $\frac{k}{2}$ седловых базисных множеств типа $(1, 2)$.*

Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-03687-а. Автор благодарит В.З. Гринеса за постановку задачи и внимание к работе, а также О.В. Починку за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Robinson C., *Structural stability of C^1-diffeomorphisms*, J. Differential Equations, 22 (1976), 28-73.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Юнаковский А.Д.

ИПФ РАН (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: yun@appl.sci-nnov.ru

Математические модели многих физических, биологических, и экономических процессов включают системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x'(t) = Ax(t),\ x(0) = x_0.$$

В принципе, решение записывается в виде $x(t) = e^{tA}x_0$, где формально матрица

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots$$

задается в виде сходящегося ряда. Эффективное вычисление этой матрицы и является главной частью работы. В этом обзоре мы пытаемся описать все методы, которые, практически применяются, классифицируем их в пять широких категорий, и оценим их относительную эффективность. Естественно, каждый из методов может быть реализован в виде различных компьютерных программ. При оценке эффективности различных алгоритмов мы будем оценивать их по следующим признакам: общность, надежность, стабильность, точность, производительность, требования хранения, удобство эксплуатации и простота. Естественно, важно знать, насколько чувствительна величина, прежде чем ее вычисление проводится. Обычно оценивается относительное возмущение

$$\Phi(t) = \frac{\|e^{t(A+E)} - e^{tA}\|}{\|e^{tA}\|}.$$

Методы вычисления операторной экспоненты можно разбить по группам:

1. Методы рядов: ряд Тейлора, аппроксимация Паде, Scaling and squaring-использование представления $e^A = (e^{A/m})^m$, Чебышевское рациональное представление.
2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Полиномиальные методы: метод Гамильтона-Кели, методы Лагранжа, Ньютона, Вандермонда, обратного преобразования Лапласа, метод сопровождающей матрицы.
4. Методы декомпозиции: метод собственных векторов, жордановых форм, метод Шура, блочно-диагональный метод.
5. Методы расщепления.
6. Методы Крыловских подпространств.

В обзоре [1] для матриц общего вида сделан вывод, что единственным вообще конкурентоспособным серийным методом является Scaling and squaring. Включение в обзор метода расщепления, несмотря на повышенный интерес к идее расщепления для уравнений в частных производных, авторы назвали чисто спекулятивным.

Произошедшие изменения в аппаратных средствах вызвали существенную переоценку многих алгоритмов. Одним из наиболее существенных изменений в численной линейной алгебре за последние 25 лет является развитие итерационных методов для разреженных матричных задач, в которых на выходе получается только результат умножения матрицы на вектор.

Для разреженных матриц метод Крыловских подпространств сводит проблему вычисления матричной экспоненты к нахождению заполненной матрицы Хессенберга гораздо меньшей размерности.

На примере нахождения приближенного решения Нелинейного Уравнения Шредингера (НУШ) [2] методом последовательной операторной замены неизвестной функции выведены уравнения численной схемы метода расщепления и проведена оценка ошибки вычисления.

Список литературы

[1] Cleve Moler, Charles Van Loan *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later*, SIAM REVIEW Vol. 45,(2003) No. 1, pp. 3–49.

[2] Юнаковский А.Д. *Моделирование нелиненйного уравнения Шредингера* Н.Новгород:. 1995г.

THE CRITICAL CASE OF STABILITY IN IMPULSIVE SYSTEM

Oleg Anashkin and Olga Yusupova

V. I. Vernadskiy Crimean Federal University (Russia, Simferopol)

E-mail: anashkin@crimea.edu

In recent years, impulsive differential equations have become one of the most important tools in some mathematical models of real processes and phenomena studied in physics, chemical technology, population dynamics, biotechnology and economics.

Let $\mathbf{R}^n$ be an n-dimentional Euclidian space with a norm $\|\cdot\|$, let $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n \colon \|x\| < r\}$ for some $r > 0$ and $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$. In the domain $G = \mathbf{R}^+ \times B_H$, we consider an impulsive system — the system of ordinary differential equations with impulse action at fixed times, which can be represented in the following form

$$\dot{x} = Ax + \sum\nolimits_{|m|\geq 2} g_m x^m, \quad t \neq \tau_k, \tag{1}$$

$$x(t^+) = Bx(t) + \sum\nolimits_{|m|\geq 2} h_m x^m, \quad t = \tau_k, \tag{2}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$, $x(t^+) = \lim_{s\to t+0} x(s)$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \geq 0$, $|m| = m_1 + \cdots + m_n$, $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, $h_m, g_m \in \mathbf{R}^n$, $\tau_{k+1} = \tau_k + \theta_k$, $0 < \theta_{min} \leq \theta_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Let $x(t; t_0, x^0)$ be a solution to the system (1)-(2) with the initial condition $x(t_0^+) = x^0$. We always assume that solutions of (1)-(2) are left continuous.

The zero solution of (1)-(2) is said to be

(i) *stable* if for any $\varepsilon > 0$ and $t_0 \in \mathbf{R}_+$ there exists a $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ such that $x^0 \in B_\delta$ implies $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ for any $t \geq t_0$;

(ii) *asymptotically stable* if (i) holds and for any $\varepsilon > 0$ and $t_0 \in \mathbf{R}_+$ there are $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ and $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$ such that $x^0 \in B_{\delta_0}$ implies $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ for any $t \geq t_0 + T$.

Despite the fact that the definition of Lyapunov stability for impulsive systems of the given type literally coincides with the definition of stability for ordinary differential equations, the presence of impulse actions leads to appearence of entirely new effects. As a result we need to develop new approaches to study the stability in impulsive systems [1].

The system (1)-(2) consists of two parts: an analogous part — the differential equation (1) and a discrete one — the difference equation (2). The discrete part is a reason of more complex behaviour of solutions of any impulsive equation in compare with solutions of an ordinary differential equation.

The critical case of the impulsive system stability is still poorly investigated. The state of the art has been changed in the last decade when two dozens of papers devoted to the critical case was published, in particular, the works by V. I. Slyn'ko et al, [2, 3, 4] and author's articles [5, 6, 7, 8, 9]. The report discusses the classification and possible methods for studying critical cases of stability of systems (1)-(2) with constant matrices of the linear approximation.

References

[1] A.M. Samoilenko and M.O. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, Singapure-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific, 1995.

[2] A.I. Dvirnyi and V.I. Slyn'ko, *Reduction theorems in the problem of stability of the critical equilibria of impulsive differential equations*, J. Math. Sci., New York 203, No. 3, 322-343 (2014)

[3] A.I. Dvirnyi and V.I. Slyn'ko, *On stability of critical equilibrium states of some classes of complex impulsive systems*, J. Comput. Syst. Sci. Int. 53, No. 1, 20-32 (2014)

[4] A.I. Dvirnyi and V.I. Slyn'ko, *A counterpart of A. M. Molchanov's critical case for impulse systems*, Autom. Remote Control 76, No. 6, 945-956 (2015).

[5] O.V. Anashkin, O.V. Mit'ko and T.V. Dovzhik, Stability of solutions of systems of differential equations with impulse effect. (Russian. English summary), Din. Sist., Simferopol' 28, 3-10 (2010).

[6] O.V. Anashkin and O.V. Mit'ko, *Sufficient conditions of stability for nonlinear systems with impulse effect* (Russian. English summary), Din. Sist., Simferopol' 1(29), No. 1, 5-14 (2011).

[7] O.V. Anashkin and O.V. Mit'ko, *On the stability of systems with impulsive effect* (Russian), Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. 22, 15-22 (2011).

[8] O.V. Anashkin and O.V. Mit'ko, *A study of the critical case of stability for a family of impulsive systems. I.* (Russian. English summary), Din. Sist., Simferopol' 4(32), No. 1-2, 153-162 (2014).

[9] O.V. Anashkin and O.V. Mit'ko, *A study of the critical case of stability for a family of impulsive systems. II.* (Russian. English summary) Din. Sist., Simferopol' 4(32), No. 3-4, 267-278 (2014).

ON THE METHOD OF NON-SMOOTH MULTIVALENT GUIDING FUNCTIONS IN THE BIFURCATION PROBLEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Sergey Kornev

Voronezh State Pedagogical University (Russia, Voronezh)

E-mail: kornev_vrn@rambler.ru

The base of the method of guiding functions was laid by M.A. Krasnosel'skii and A.I. Perov (see, e.g., [1], [2]). The application of multivalent guiding functions became one of the most important directions of its development and it demonstrated its effectiveness to the study of periodic problems for differential equations (see [3]).

There is a number of papers devoted to the expansion of the guiding functions method to the investigation of the bifurcation phenomena in dynamical systems governed by various classes of differential inclusions (see [4], [5]). Notice that the bifurcations were studied in [4] by the classical method of guiding functions and investigated in [5] by the method of integral guiding functions.

All these works are employing the same methodology: to use some homotopy invariants which are responsible for multi-parameter bifurcations of multivalued maps and to apply them to differential inclusions admitting a guiding function. This idea has a clear geometric interpretation: a guiding function governs the behaviour of the Poincare-Krasnosel'skii translation operator along the trajectories of the corresponding problem.

In the present paper, developing the abstract approach proposed in [4] and generalizing the result obtained in [6], the method of non-smooth multivalent guiding functions is used to investigate the bifurcation problem for some classes of differential equations. It should be mentioned that various modifications of the multivalent guiding functions method, including its non-smooth analog, were used previously only to justify the existence of periodic solutions (see, e.g., [3], [7]-[10]).

Acknowledgments. This research is supported by the joint Taiwan NSC - Russia RFBR grant 14-01-92004 and the RFBR grants 14-01-00468, 16-01-00386, as well as RSF grant 14-21-00066 (in Voronezh State University).

References

[1] Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. *On a certain principle of existence of bounded, periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 123 (1958), 235–238 (in Russian).

[2] Krasnosel'skii M.A. *The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations*, Nauka, Moscow (1966) (in Russian).

[3] Rachinskii D.I. *Multivalent guiding functions in forced oscillation problems*, Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl., 26 (1996), 631–639.

[4] Kryszewski W. *Homotopy properties of set-valued mappings*, Univ. N. Copernicus Publishing, Torun (1997).

[5] Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. *Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis*, Springer, Berlin (2013).

[6] Kornev S.V., Loi N.V. *Method of multivalent guiding functions in the bifurcation problem of solutions of differential equations*, The Bulletin of Tambov State University. Natural and Engineering Sciences, 21 (2016), no. 2, 390–401 (in Russian).

[7] Kornev S.V. *On the method of multivalent guiding functions to the periodic problem of differential inclusions*, Autom. Remote Control., 64 (2003), 409–419.

[8] Kornev S.V., Obukhovskii V.V. *On nonsmooth multivalent guiding functions*, Differ. Equat., 39 (2003), 1578–1584.

[9] Kornev S.V. *Set of multivalent guiding functions in the periodic problem of some classes of differential inclusions*, The Bulletin of Tambov State University. Natural and Engineering Sciences, 20 (2015), no. 4, 835–842 (in Russian).

[10] Kornev S.V. *Multivalent guiding function in a problem on existence of periodic solutions of some classes of differential inclusions*, Russian Mathematics (Iz. VUZ) (2016), no. 11, 14–26.

SKELETON DECOMPOSITION OF LINEAR OPERATORS IN THE THEORY OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Sidorov N., Sidorov D., Li Y.

Irkutsk State University (Russia, Irkutsk), Hunan University (China, Changsha)

E-mail: contact.dns@gmail.com

The following differential-operator equation

$$BL\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x) \tag{1}$$

is considered. Here $B \in \mathcal{L}(E \to E)$ is non-invertible operator and can be represented as the following skeleton decomposition $B = A_1A_2$, $A_2 \in \mathcal{L}(E \to E_1)$, $A_1 \in \mathcal{L}(E_1 \to E)$, $x = (t, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ and $L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ are differential operators, operator $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ is resolved wrt higher derivative on t, order of operator L_1 is lower than order of operator L. Previous results [1], [2] are developed. The nonclassic initial boundary value problem for eq. (1) is formulated and its well-poseness is proved. Results are applied for system of PDE with non-invertible operator B in the main part. The skeleton chains of the operator B (here readers may refer to [1]) are employed to introduce operators A_i, $i = 1, \ldots, 2p$, where p is length of skeleton chain of operator B. This enable reduction of the equation (1) to solution of the following recursive system of equations

$$B_pLu_p = L_0u_p + \prod_{j=1}^{p} A_{2j}f, \tag{2}$$

$$L_1u_i = A_{2i+1}Lu_{i+1} - \prod_{j=1}^{i} A_{2j}f(x),\ i = p-1, \ldots, 1, \tag{3}$$

$$L_1u_0 = -f(x) + A_1L_1u_1. \tag{4}$$

B_p has bounded inverse operator or null operator. For system (2)-(4) in the concrete case of differential operators L, L_1 it is natural to introduce the initial and boundary conditions. These conditions will give well-posed initial and boundary conditions for eq. (1). It is demonstrated that element u_0 will satisfy eq. (1) with well-posed nonclassic boundary conditions. If B_1 is invertible operator then system (2)-(4) contains two equations only

$$B_1Lu_1 = L_0u_1 + A_2f,$$
$$L_0u = -f(x) + A_1L_1u_1,$$

where u satisfy eq. (1).

Proposed theory can be applied to solution of DAE in electrical power systems modeling [3]. Proposed method can be generalized on nonlinear equations with non-invertible operator in the main part.

This work is funded by the international science and technology cooperation program of China under Grant No. 2015DFR70850.

References

[1] Sidorov N., Sidorov D., Li Y. *Skeleton decomposition of linear operators in the theory of degenerate differential equations*, arXiv (2016), 1511.08976v2.

[2] Sidorov N.A., Blagodatskaya E.B. *Differential equations with the Fredholm operator in the leading differential expression.* J. Soviet Math. Dokl. 44(1) (1992) pp. 302–305.

[3] Sidorov D., *Integral dynamical models: singularities, signals and control*, vol. 87 of *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*. Singapore: World Scientific, 2015.

Секция 4. Дифференциальные уравнения в частных производных

К ВОПРОСУ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Балашова Г. С.

НИУ "МЭИ"(Россия, Москва)

E-mail: balashovags@mpei.ru

В некоторой ограниченной области $G \subset R^\nu$, $\nu \geq 1$, с границей Γ рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка. В работе предложен новый подход, использующий представление дифференциального оператора бесконечного порядка в виде суммы двух операторов, один из которых главный, а другой ему подчиненный, в то время как оба оператора бесконечного порядка:

$$L_1(u) + L_2(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\alpha u) + \\ +\lambda \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad x \in G, |\gamma| \leq |\alpha|, \tag{1}$$

$$D^\omega u(x)\big|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \dots . \tag{2}$$

Здесь L_1- главный эллиптический оператор, L_2- оператор ему подчиненный.

$$h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)} \equiv \Bigg\{ h(x) = \\ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha h_\alpha(x) : \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||h_\alpha(x)||_2^2 < \infty, \quad h_\alpha(x) \in L_2(G) \Bigg\}.$$

В основу сравнения двух дифференциальных операторов L_1 и L_2 бесконечного порядка положено сравнение пространств $W^\infty\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$, $W^\infty\{b_\alpha, 2\}_{(G)}$, являющихся областями определения этих операторов.

Тогда при выполнении ряда условий для операторов L_1 и L_2 задача (1), (2) имеет решение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$ при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$, удовлетворяющей следующему условию

$$\int\limits_G \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha(x) D^\alpha v_\lambda(x) dx = 0$$

для всех $v_\lambda(x)$, являющихся решением однородной задачи

$$L_1(v) + \lambda L_2(v) = 0, , D^w v(x)|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

В частности, если однородная задача (3) имеет только нулевое решение, то задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА.

Зарубин А.Н.

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева (Россия, Орел)

E-mail: aleks_zarubin@mail.ru

Уравнение

$$U_{xx}(x,y) + sgny U_{yy}(x,y) - U(\alpha_1(x),y)U(\alpha_2(x),y) = 0, \tag{1}$$

где $\alpha_1(x) < x, \alpha_1'(x) > 1(\alpha_1'(x) < 1)$ и $\alpha_2(x) < x, \alpha_2'(x) < 1(\alpha_2'(x) > 1)$ - гомеоморфные растягивающе (сжимающе)-запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения сохраняющие ориентацию, причем $\alpha_1(\alpha_2(x)) = \alpha_2(\alpha_1(x)) = x$, рассматривается в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, если $D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup J = \{(x,y) : x_0 < x < x_2, 0 < y < h\}(0 < h \equiv const)$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^-$ - эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\}(k = -1,0,1,2),$$

$$D_k^- = \{(x,y) : -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\}(k = -1,0,1,2),$$

$$I = \{(x,y) : x_0 < x < x_2, y = 0\}, J = \{(x,y) : x = x_1, 0 < y < h\}$$

и $\alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x), \alpha_1^0(x) = x, \alpha_1^1(x) = \alpha_1(x), \alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x))$, а $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$.

Задача Т. Найти в области D решение $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \backslash J) \cap C^2(D \backslash (I \cup J))$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x_0,y) = U(x_2,y), 0 \le y \le h; U(x,h) = \varphi(x), x_0 \le x \le x_2;$$

$$U(x, -\alpha_1^k(x)) = \psi_k(x), x_k \le x \le \alpha_2^k(x_1/2)(k = 0,1);$$

$$U(x,y) = f(\alpha_2(x) + y\sqrt{-sgny})f(\alpha_2(x) - y\sqrt{-sgny}), (x,y) \in \bar{D}_{-1};$$

$$U(x,y) = f(\alpha_1^2(x) + y\sqrt{-sgny})f(\alpha_1^2(x) - y\sqrt{-sgny}), (x,y) \in \bar{D}_2;$$

условиям сопряжения

$$U(x,0-) = U(x,0+) = \omega(x), U_y(x,0-) = U_y(x,0+) = \nu(x), x_0 < x < x_2, x \ne x_1;$$

условиям согласования

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_2) = \psi_0(x_0) = 0,$$

где $\varphi(x), \psi_k(x)(k = 0,1), f(x)$ - заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

L_p-ОЦЕНКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Калинин А.В., Тюхтина А.А.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: avk@mm.unn.ru, kalinmm@yandex.ru

Исследование вопросов корректности и изучение свойств решений математических задач гидродинамики и электромагнитной теории опираются на неравенства, связывающие L_p-нормы функций $\vec{u}$, rot$\vec{u}$, div$\vec{u}$ [1]–[4]. В случае физической неоднородности сред непосредственное применение этих неравенств невозможно.

В настоящей работе приводятся оценки для скалярных произведений векторных полей, обобщающие результаты работ [1]–[8], которые могут быть эффективно использованы при исследовании задач электромагнитной теории в неоднородных средах. Одним из характерных результатов, рассматриваемых в работе, является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область с регулярной границей, гомеоморфная шару. Тогда найдётся такая постоянная* $C > 0$*, зависящая только от области* Ω *и* p*, что неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx \leq C \left(\|\vec{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} \|\mathrm{div}\vec{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} \|\vec{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \right.$$

$$\left. \|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} \|\mathrm{div}\vec{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \right)$$

выполняется при $p > 3/2$ *для всех* $\vec{u} \in H_q^0(\mathrm{rot};\Omega)$ *и* $\vec{v} \in H_p(\mathrm{div};\Omega)$*, при* $q > 3/2$ *для всех* $\vec{u} \in H_q(\mathrm{rot};\Omega)$ *и* $\vec{v} \in H_p^0(\mathrm{div};\Omega)$*,* $1/q + 1/p = 1$*.*

Здесь $H_p(\mathrm{div};\Omega)$, $H_p^0(\mathrm{div};\Omega)$, $H_q(\mathrm{rot};\Omega)$, $H_q^0(\mathrm{rot};\Omega)$ – стандартным образом определяемые банаховы пространства [7].

Возможность использования данного неравенства иллюстрируется на примере краевых задач для стационарной системы уравнений Максвелла и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в неоднородных средах, в том числе в областях, содержащих непроводящие, проводящие и слабопроводящие включения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части (код проекта 2664) и проектной части (код проекта 1727) государственного задания в 2014-2016 гг., поддержана грантом в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ им. Н.И. Лобачевского и грантом Правительства РФ № 14.B25.31.0023.

Список литературы

[1] Weyl H. *The method of orthogonal projection in potential theory* Duke Math. J. 7(1940), 411–444.

[2] Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. *Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа* Труды МИАН СССР 59(1960), 5–36.

[3] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике* М.: Наука, 1980.

[4] Girault V., Raviart P.-A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations* New York: Springer-Verlag, 1986.

[5] Калинин А.В. *Некоторые оценки теории векторных полей* Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление 20(1997), 32–38.

[6] Калинин А.В., Калинкина А.А. *Оценки векторных полей и стационарная система уравнений Максвелла* Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. 25(2002), 95-107.

[7] Калинин А.В., Калинкина А.А. *L_p-оценки векторных полей* Известия Вузов.Математика № 3(2004), 26–35.

[8] Жидков А.А., Калинин А.В., Тюхтина А.А. *L_p-оценки векторных полей в неораниченных областях и некоторые задачи электромагнитной теории в неоднородных средах* Вестник Удмурдского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки № 1(2012), 3–15.

ДВУМЕРНЫЕ ТОРЫ ОБОБЩЕННОГО УВРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

Кащенко С. А., Преображенская М. М.

ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Россия, Ярославль)

E-mail: rita.preo@gmail.com

Рассмотрим задачу

$$u_t + u_{xxx} + (\alpha u + \beta u^2) u_x = au + cu^3, \ u(t, x+T) = u(t,x), \tag{1}$$

где параметр a является малым:

$$a = \varepsilon a_0, \ 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{2}$$

Изучим вопрос о построении в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия двумерных торов.

Фиксируем произвольно натуральные $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$ и положим $k_1 = 2\pi n_1/T$, $k_2 = 2\pi n_2/T$. Речь пойдет о построении невырожденных двумерных торов уравнения (1) в виде формального ряда

$$u = \eta(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{N} \xi_j(t,\varepsilon) \exp(ik_j x + ik_j^3 t) + c\bar{c} + \ldots, \tag{3}$$

где через $\ldots$ обозначены слагаемые, содержащие квадратичные, кубические и т. д. слагаемые по степеням ε, η, ξ_j и являющиеся по t и x тригонометрическими многочленами. Главные свойства функций $\eta = \eta(t,\varepsilon)$ и $\xi_j = \xi_j(t,\varepsilon)$ заключаются в следующем. Во-первых, η и ξ_j являются достаточно малыми, а значит, можно рассматривать ряды по их степеням. Во-вторых, их производные по t также являются малыми и выражаются через малые величины η, ξ_j и ε:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \alpha_1\varepsilon\eta + \alpha_2\eta^2 + \sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_{3j}|\xi_j|^2 + \alpha_4\eta^3 + \eta\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_{5j}|\xi_j|^2, \\ \dot{\xi_j} = \beta_{1j}\varepsilon\xi_j + \beta_{2j}\eta\xi_j + \xi_j\Big(\sum\limits_{s=1}^{2}\beta_{3js}|\xi_s|^2 + \beta_{4j}\eta^2\Big)\ (j=1,2). \end{cases} \tag{4}$$

Подставляя (3) в (1) и производя стандартные действия, находим последовательно все коэффициенты системы (4).

Для поиска торов сделаем в (4) полярную замену $\xi_j = \rho_j\exp(i\varphi_j t)$ $(j=1,2)$. Тем самым, вопрос о существование торов системы (4) эквивалентен вопросу о существовании состояний равновесия отщепляющейся амплитудной системы, а именно о разрешимости алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} \eta\big(a_0\varepsilon + 6c(\rho_1^2+\rho_2^2) + c\eta^2\big) = 0, \\ \rho_1(a_0\varepsilon + 3c\rho_1^2 + 6c\rho_2^2 + 3c\eta_0^2) = 0, \\ \rho_2(a_0\varepsilon + 6c\rho_1^2 + 3c\rho_2^2 + 3c\eta_0^2) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Грубым решением (удовлетворяющим условию невырожденности) называется простое решение системы (5) для нахождения амплитуд.

Теорема. *Пусть система (5) имеет грубое решение η_*, ρ_{1*}, ρ_{2*} $(\rho_{1*},\rho_{2*} > 0)$. Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (1) имеет асимптотический по невязке двумерный тор*

$$u_* = \eta_* + \sum_{j=1}^{2}\rho_{j*}\exp\big(ik_jx + i(k_j^3+\varphi_{j*})t\big) + c\bar{c} + O(\varepsilon).$$

АВТОРЕЗОНАНС В МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА ТЕРАГЕРЦЕВЫХ ВОЛН

Киселев О.М., Новокшенов В.Ю.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН (Россия, Уфа)

E-mail: novik53@mail.ru

1. Введение

Терагерцевый диапазон электромагнитных волн ($\sim 10^{12}$ Гц, длина волны $0.1-1$ мм) слабо покрывается современными электронными и оптическими устройствами. В то же время этот диапазон важен для медицинских, контртеррористических, научных и других приложений ввиду высокой проницаемости в диэлектриках при малой мощности излучения. Открытый недавно источник излучения перестраиваемой частоты на основе стопки контактов Джозефсона, может стать эффективным для этих приложений [1]. Изученные образцы, состоящие из сотен параллельных сверхпроводящих слоев, демонстрируют синхронизацию частот отдельных джозефсоновских контактов. Более того, мощность излучения растет как квадрат от числа слоев. Предложенная математическая модель данного устройства изучена слабо. Она представляет собой цепочку уравнений синус-Гордон, где каждое уравнение линейно связано с ближайшими соседями, а также имеет члены, отвечающие диссипации и накачке энергии [2]

$$\ell^2\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} = (1-\alpha\Delta_2)\left(\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2} + \sin\varphi_n + \varepsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} - j_{ext}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_n(t,-L)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_n(t,L)}{\partial x} = 0, \quad -L < x < L, \quad n = 1,2,\ldots,N, \tag{2}$$

где φ_n - фаза электрического поля в n-ом слое, $\omega_{res} = \pi\ell/L$, - резонансная частота излучения, j_{ext} - внешний ток накачки, $\varepsilon \ll 1$ - малая диссипация, Δ_2 - вторая разность, $\Delta_2\varphi_n \equiv \varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}$. Необходимо найти начальные условия, а также значения параметров накачки и диссипации, обеспечивающие синхронизацию волновых мод в большинстве узлов цепочки. Эксперименты показывают, что подобные режимы достаточно редки, в общем положении синхронизация не наступает, что ведет к резкому падению мощности излучения. Традиционные механизмы синхронизации [3] посредством среднего поля, захвата фазы хаотических колебаний или образования кластеров с водителем ритма, по-видимому, неприменимы к данной системе. В силу специфики уравнений возможно образование устойчивых мод типа кинков или бризеров в каждом узле и их согласование по фазе. Контролем этого согласования здесь является вольт-амперная характеристика, или зависимость j_{ext} от частоты излучения. Эта зависимость носит типично резонансный характер, то есть наблюдается частота, на которой затраты тока для генерации излучения максимальны. Обычно автофазировка - захват в резонанс - возникает для узкого и нетривиально устроенного множества фаз нелинейных волн. Объяснение резонансной зависимости параметров системы с автофазировкой составляют предмет доклада.

В нелинейной цепочке (1), (2) имеются большие и малые параметры, которыми следует воспользоваться для построения теории возмущений. Оказывается, что при больших частотах ω_{res} цепочка асимптотически "расцепляется"и существует режим линейного по времени роста φ_n. Мы исследуем этот режим захвата в резонанс реализуется, выводя зависимость тока j_{ext} от частоты ω. Необходимым условием резонанса служит зависимость поля φ_n от пространственных переменных n и x. Показано, что в главном члене асимптотики необходимо выполнение "уравнения главного резонанса". Здесь оно представляет собой уравнение математического маятника с периодически изменяющейся частотой. Мы устанавливаем существование решений этого уравнения и исследуем их устойчивость.

Список литературы

[1] L.Ozyuzer et al., Emission of coherent THz radiation from superconductors, Science V.318, P.1291–1293 (2007)

[2] X. Hu and S. Lin, Three-dimensional phase-kink state in a thick stack of Josephson junctions and terahertz radiation, Physical Review B, V.78 N.13, 134510 (2008)

[3] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, Cambridge University Press, 2003, 432 P

ОБ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Кожевникова Л.М.

Стерлитамакский филиал БашГУ (Россия, Стерлитамак)

E-mail: kosul@email.ru

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\},\ n \geq 2$. Для анизотропного эллиптического уравнения рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_i} = a_0(\mathrm{x}, u), \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{1}$$

$$u(\mathrm{x})\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\mathrm{x})\Big|_{\partial\Omega}. \tag{2}$$

В работе [1] для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1-правой частью было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием и доказаны его существование и единственность в произвольной области Ω. Изучению существования энтропийных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями второго порядка с L_1-правой частью в ограниченной области Ω посвящена статья [2]. Следует отметить, что практически все работы, посвященные энтропийным решениям эллиптических уравнений, предполагают ограниченность области Ω, что существенно облегчает исследования благодаря известным теоремам вложения. Автору известна лишь работа [1], в которой допускается неограниченность области Ω.

В настоящей работе предполагается, что функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \dots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}))$, $a_0(\mathrm{x}, s_0)$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ каратеодориевы. Кроме того, функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию Гельдера по переменной s_0. Функция $a_0(\mathrm{x}, s_0)$ неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$. Пусть существуют неотрицательные функции $\phi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$, положительная непрерывная функция $\widehat{a}(k)$ и положительная константа $\overline{a}$ такие, что справедливы неравенства:

$$\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})) \leq \widehat{a}(k)(\Phi(\mathrm{x}) + \mathrm{B}(\mathrm{s})), \quad \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{a}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i(a_i), \quad \mathrm{B}(\mathrm{s}) = \sum_{i=1}^{n} B_i(s_i); \tag{3}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0 \tag{4}$$

при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $s_0 \in [-k, k]$, $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$. Следующее неравенство

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot (\mathrm{s} - \nabla\psi) \geq \overline{a}\mathrm{B}(\mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}) \tag{5}$$

предполагается выполненным при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$. Здесь $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. $B_1(z), ..., B_n(z)$ — N–функции, $\overline{B}_1(z), ..., \overline{B}_n(z)$ — дополнительные к ним, для всех предполагается выполненным Δ_2–условие.

Положим $a_0(\mathrm{x}, s_0) = a_0(\mathrm{x}, \psi) + b(\mathrm{x}, s_0)$, считаем, что

$$a_0(\mathrm{x}, \psi) \in L_1(\Omega), \quad \sup_{|s_0| \leq k} |b(\mathrm{x}, s_0)| = G_k(\mathrm{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{6}$$

Кроме того, потребуем существование $\delta_0 > 0$ такого что:

$$b(\mathrm{x}, \psi \pm \delta_0) \in L_1(\Omega). \tag{7}$$

При выполнении условий (3)–(7) доказана теорема существования энтропийного решения задачи Дирихле (1), (2) в анизотропном пространстве Соболева-Орлича для произвольной неограниченной области Ω, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Список литературы

[1] Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Galluet, M. Pierre, J.L. Vazquez *An L1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. 1995. V. 22. №2, P. 241–273.

[2] A. Benkirane, J. Bennouna *Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces*, Abstr. Appl. Anal. 2002. V.7. №2, P.85–102.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННЫЕ АБСТРАКТНЫМИ ЗАДАЧАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.

КФУ им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: radomirskaya@mail.ru

На базе абстрактной формулы Грина рассмотрены спектральные задачи, содержащие в постановке два комплексных параметра, один из которых можно считать фиксированным, а другой спектральным. Эти задачи с использованием предложенного общего подхода сведены к изучению спектральной проблемы для операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами, действующего в гильбертовом пространстве и зависящего от двух параметров.

Установлено, что как для одной области, граница которой разбита на четыре липшицевых куска с различными граничными условиями на этих кусках, так и для двух пристыкованных областей, границы которых в общей сложности разбиты на 15 липшицевых кусков, исходные спектральные проблемы математической физики приводятся к исследованию одного и того же операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами, являющегося оператор-функцией двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой – спектральным. Получаем следующий операторный пучок:

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A_1^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1} B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega),$$

$$B_k := (A^{1/2} V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0, \; B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \;\; k = \overline{2, 4}.$$

Частными случаями такой задачи являются спектральные проблемы, возникающие при исследовании нормальных колебаний вязкой жидкости (пучок С.Г.Крейна), задач конвекции, задач дифракции и других.

В докладе более подробно рассматриваются следующие случаи:

1). если λ — спектральный параметр:

а. $\mu \leqslant 0$;

b. $\mathrm{Re}\mu \leqslant 0$;
c. $\mathrm{Im}\mu \neq 0$;
2). если μ — спектральный параметр:
a. $\lambda \geqslant 0$;
b. $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$;
c. $\mathrm{Im}\mu \neq 0$.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., *Спектральная теория операторных пучков*, Специальный курс лекций для студентов специальности "Математика Симферополь ООО ФОРМА, 2009. – 128 с.

[2] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. *Абстрактные краевые задачи*, Международная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V"в городе Ростове-на-Дону. Тезисы докладов. -Ростов н/Д.: Изд. Центр ДГРТУ, 2015. – С. 115-116.

[3] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. *Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения*, XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2015). Тезисы докладов. - Симферополь: КФУ, 2015. – С.52.

[4] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. *О некоторых абстрактных краевых задачах сопряжения и их приложениях*, XXIV Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". - Изд-во Фонд науки и образования. Ростов н/Д, 2016. – С. 89.

СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НА ОКРУЖНОСТИ

Корнута А.А.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: korn_57@mail.ru

На окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ рассматривается параболическое функционально-дифференциальное уравнение с преобразованием пространственной переменной:

$$\begin{gathered} \partial_t u + u = \mu\partial_{xx}u + L\,(\mathrm{Q}_\pi u) + \Lambda\,(\mathrm{Q}_\pi u)^2 + (\mathrm{Q}_\pi u)^3\,, \\ u\,(x+2\pi,t) = u\,(x,t)\,, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 2\pi, \end{gathered} \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$, $\mathrm{Q}_\pi u = \mathrm{Q}_\pi u(x,t) = u(x+\pi,t)$; $\quad L,\ \Lambda = \ -\sqrt{\frac{3|L|}{\operatorname{ctg}\omega}}$, $\mu > 0$ - параметры [1], [2].

Уравнение (1) в соболевском пространстве $H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ $2\pi-$периодичных функций при каждом значении параметра μ порождает динамическую систему. Решения уравнения (1) при $t \to +\infty$ и $L < -1$ стремятся к одному из его стационарных пространственно однородных решений: 0, $\pm\sqrt{-1-L}$. Нулевое решение при $\mu > -1-L$ является экспоненциально устойчивым. При уменьшении μ и его прохождении значения $\mu_1^* = -L-1$ нулевое решение теряет устойчивость. Имеет место теорема.

Теорема. *При $L < -1$, существует $\delta > 0$, такое что для любых значений параметра μ удовлетворяющих неравенству $-L-1-\delta < \mu < -1-L$, существует решение $\varphi_1(x,\mu)$ уравнения (1), определяемое равенством*

$$\varphi_1(x,\mu) = \left(z\cos x + z^2\sigma_2(x,\mu) + z^3\sigma_3(x,\mu) + z^4\sigma_4(x,\mu) + r(z,x,\mu)\right)|_{z=z(\mu)},$$

где

$$\sigma_2 = -\frac{\Lambda}{2}\left(\frac{1}{L-1-2\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2-2\lambda_1}\right)\cos 2x, \qquad \sigma_3 = \frac{-2\Lambda^2-2\lambda_1+\lambda_2}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\cos 3x,$$

$$\begin{gathered} \sigma_4 = \frac{\Lambda}{2}\Bigg[\frac{1}{L-1-4\lambda_1}\bigg(\frac{3}{L-1-2\lambda_1} + \frac{3}{4\,(\lambda_2-2\lambda_1)} - \frac{5\Lambda^2}{2\,(L-1-2\lambda_1)^2} + \frac{\Lambda^2}{(L-1-2\lambda_1)\,(\lambda_2-2\lambda_1)} - \\ - \frac{\Lambda^2}{4\,(\lambda_2-2\lambda_1)^2}\bigg) + \frac{1}{(\lambda_2-4\lambda_1)}\bigg(\frac{3}{2\,(L-1-2\lambda_1)} - \frac{3}{(\lambda_2-2\lambda_1)} - \frac{1}{2\,(\lambda_3-3\lambda_1)} - \frac{\Lambda^2}{(\lambda_2-2\lambda_1)^2} + \\ + \frac{3\Lambda^2}{(L-1-2\lambda_1)\,(\lambda_2-2\lambda_1)} + \frac{\Lambda^2}{(\lambda_2-2\lambda_1)\,(\lambda_3-3\lambda_1)}\bigg)\cos 2x + \\ + \frac{1}{(\lambda_2-2\lambda_1)\,(\lambda_4-4\lambda_1)}\bigg(-\frac{3}{4} - \frac{\lambda_2-2\lambda_1}{\lambda_3-3\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{4\,(\lambda_2-2\lambda_1)} + \frac{\Lambda^2}{\lambda_3-3\lambda_1}\bigg)\cos 4x\Bigg], \end{gathered}$$

здесь $\lambda_k = -\mu^2 k^2 - 1 + (-1)^k L, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad r(z, x, \mu) = O(|z|^4)$, $z(\mu) > 0$ — *непрерывная ветвь стационарных точек уравнения*

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu) z + \left[-\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{L - 1 - 2\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{2\,(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right] z^3.$$

Решение $\varphi_1(x, \mu)$ *— экспоненциально устойчиво.*

Теорема доказана методом центральных многообразий. Для исследования динамики стационарных структур $\varphi_1(x, \mu)$ при отходе параметра μ от бифуркационного значения μ_1^* строится иерархия упрощённых моделей задачи (1). Установлено, что стационарная структура $\varphi_1(x, \mu)$ сохраняет устойчивость на всём промежутке $0 < \mu < \mu_1^*$.

Также рассмотрен вопрос о ветвлении из нулевого решения стационарных структур при прохождении параметра μ через критические значения $\mu_k^* = (-1 - L)/k^2, k = 2, 3, \ldots$.

Список литературы

[1] Ахманов. С.А., Воронцов. М.А., Иванов. В.Ю., *Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации,* — М.: Наука, (1990). 263-325.

[2] Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией,* — М.: (2005).

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Лиманский Д.В.

ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" (Украина, Донецк)

E-mail: 4125aa@gmail.com

В докладе рассматриваются априорные оценки для систем минимальных дифференциальных операторов в шкале изотропных (анизотропных) пространств Соболева $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$ (в изотропном случае l — натуральное число, в анизотропном — вектор $l = (l_1, \ldots, l_n)$ с натуральными компонентами).

Описаны условия на вектор l, при которых существуют l-квазиэллиптические и слабо коэрцитивные в шкале анизотропных пространств $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ системы операторов. Построены широкие классы слабо коэрцитивных в шкале изотропных (анизотропных) пространств $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптических ($l$-квазиэллиптических) дифференциальных полиномов и их систем (в анизотропном случае это сделано для почти всех $l = (l_1, \ldots, l_n)$). Кроме того, получено полное описание дифференциальных полиномов от двух переменных, слабо коэрцитивных в $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Основные результаты доклада анонсированы в работах [1]–[3].

Список литературы

[1] Лиманский Д.В., Маламуд М.М., *О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в* L^1 *и* L^∞ // ДАН (2004). Т.397. № 4. С. 453–458.

[2] Лиманский Д.В., Маламуд М.М., *Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в* $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ // ДАН (2007). Т.415. № 5. С. 583–588.

[3] Лиманский Д.В., Маламуд М.М., *Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева* // Матем. сб. (2008). Т. 199. № 11. С. 75–112.

ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Лукьяненко В.А.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: art-inf@yandex.ru

Гаховым Ф.Д., Черским Ю.И. и их учениками найдены решения в квадратурах широкого класса задач теории аналитических функций, уравнений типа свертки, сингулярных интегральных уравнений [1-2]. В соответствии с программой исследования получены результаты по разрешимости и решения в квадратурах краевых задач типа Карлемана для двух неизвестных функций. Как и в классическом случае, решение сводится к задаче факторизации и задаче по скачку. Приведем схему решения на конкретном примере.

Задачи Карлемана для двух функций $U(z),\ V(z)$:

$$U(x+i) - B(x)V(x-i) = G(x),\ U(x) + D(x)V(x) = H(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Задача факторизации коэффициентов краевой задачи (1)

$$D(x) = \frac{Y(x)}{X(x)}, \quad B(x) = \frac{Y(x+i)}{X(x-i)}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и обозначая $\Phi(x) = U(x)Y^{-1}(x),\ \Psi(x) = V(x)X^{-1}(x)$, приходим к задаче по скачку

$$\Phi(x+i) - \Psi(x-i) = G_1(x),\ \Phi(x) + \Psi(x) = H_1(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $G_1(x) = G(x)Y^{-1}(x+i),\ H_1(x) = H(x)Y(x)$. Решение задачи (3) находим с помощью преобразования Фурье.

Решение задачи факторизации (2) в предположениях

$$B(x) \neq 0,\ D(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \ldots, indB(x) = indD(x) = 0$$

сводится к задаче по скачку

$$\ln D(x) = \ln Y(x) - \ln X(x),\ \ln B(x) = \ln Y(x+i) - \ln X(x-i)$$

относительно функций

$$\Phi(x) = \ln Y(x),\ \Psi(x) = \ln X(x),\ G(x) = \ln B(x),\ H(x) = \ln D(x),$$

решение которой находится по формулам

$$Y(x) = \exp\left\{ \frac{i}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} cth \frac{\pi(x-s)}{2} \ln D(s) ds + \frac{1}{2} \ln D(x) - \frac{i}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} th \frac{\pi(x-s)}{2} \ln B(s) ds \right\},$$

$$X(x) = \exp\left\{ \frac{i}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} cth \frac{\pi(x-s)}{2} \ln D(s) ds - \frac{1}{2} \ln D(x) - \frac{i}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} th \frac{\pi(x-s)}{2} \ln B(s) ds \right\}.$$

Список литературы

[1] Гахов Ф.Д. *Уравнения типа свертки* Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296с.

[2] Черский Ю.И. *Метод сопряжения аналитических функций с приложениями* Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552с.

[3] Лукьяненко В.А. *Обобщенная задача Карлемана* / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. – 2005. – № 19. – С. 129-144.

[4] Лукьяненко В.А. *Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных* / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. – 2014. – № 1-2. – С. 143-152.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

Лукьяненко В.А., Трондина Н.И.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)
E-mail: art-inf@yandex.ru

Интегральные уравнения (ИУ) типа свертки в классе периодических функций, рассмотренные в работе [1,2], допускают широкие обобщения. Рассмотрим операторные ИУ для периодических функций следующего вида

$$u(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\mathbf{K}(x-s)u(s))\,ds = g(x),\ -\pi < x < \pi, \tag{1}$$

u, g – абстрактные функции, $\mathbf{K}(x)$ – оператор, зависящий от параметра, 2π-периодический. Преобразование Фурье определяет последовательность

$$K_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{K}(s)e^{-ips}d(s),\ p = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Тогда решения (1) дается формулой

$$u(x) = g(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\mathbf{R}(x-s)g(s))\,ds, \tag{2}$$

где $\mathbf{R}(x) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} e^{-ipx}R_p,\ -2\pi < x < 2\pi,\ [I + K_p]^{-1} = I - R_p,\ p = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$ С такими ИУ связаны операторные системы разностных уравнений

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}_{k-p}(s)u_p(s) = g_k(s),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \tag{3}$$

Оператор

$$M(t)(s) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}_p(s)t^p,\ |t| = 1$$

имеет ограниченный обратный

$$M^{-1}(t)(s),\ |t| = 1.$$

$$\mathbf{R}_k(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} M^{-1}(t)(s)\frac{d\tau}{\tau^{k+1}},\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Решение

$$u_k(s) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (\mathbf{R}_{k-p}(s)g_k(\cdot))\,(s),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \tag{4}$$

Пример. $|t| = 1,\ U(t,s),\ 0 < s \le 2,\ M(t,s)U(t,s) \equiv \frac{ts}{t-3}U(t,s) + U(t,1) = G(t,s)$

$$U(t,s) \equiv M^{-1}(t,s)G(t,s) \equiv \frac{t-3}{ts}(G(t,s) - \frac{t-3}{ts}G(t,1)) = R(t,s)G(t,s),$$

$$\frac{t}{t-3}U(t,1) + U(t,1) = G(t,1),\ \left(\frac{t}{t-3} + 1\right)U(t,1) = G(t,1),\ U(t,1) = \frac{t-3}{2t-3}G(t,1),$$

$$\Re_k(s)g_k(s) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \left(G(\tau,s) - \frac{\tau-3}{2\tau-3}G(\tau,1)\right)\frac{(\tau-3)}{\tau s}\frac{d\tau}{\tau^{k+1}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Re_{k-p}(s)g_p(s) = u_k(s).$$

Система $\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} M_{k-p}(s)u_p(s) = g_k(s)$ имеет решение $u_k(s) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} \Re_{k-p}(s)g_p(s)$.

Список литературы

[1] Гахов Ф.Д. *Уравнения типа свертки* Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296с.
[2] Черский Ю.И. *Метод сопряжения аналитических функций с приложениями* Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552с.

ЗАДАЧА ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Марковский А.Н.

Кубанский госуниверситет (Россия, Краснодар)

E-mail: mark@kubsu.ru

Рассматривается разложение пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму полигармонического пространства и его ортогонального дополнения. Доказывается разложение пространства полигармонических функций в прямую сумму подпространств.

Строятся проекции функции на полигармонические подпространства и определяются ортогональные полигармонические компоненты функции.

Доказывается полнота системы сдвигов фундаментальных решений полигармонического уравнения и строится сходящийся алгоритм выделения полигармонической составляющей функции; гармонический случай разобран в [1].

Приводятся некоторые результаты численных расчетов, в частности, для цифровых изображений.

Список литературы

[1] В. Г. Лежнев *Выделение гармонической составляющей*, Численный анализ: теория, приложения, программы: Сборник научных трудов, МГУ (1999), 90—95.

УСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

Мешкова Ю. М., Суслина Т. А.

Санкт-Петербургский государственный университет (Россия, Санкт-Петербург)

E-mail: y.meshkova@spbu.ru, t.suslina@spbu.ru

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, Ω — ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций используем обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается матричный самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор $B_{D,\varepsilon}$ второго порядка, заданный выражением $B_{D,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x})$ при условии Дирихле на границе. Коэффициенты g, a_j, Q периодичны относительно решетки Γ. Матрица коэффициентов $g(\mathbf{x})$ размера $m \times m$ ограничена и положительно определена. Оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ (где b_j — постоянные $(m \times n)$-матрицы), причем $m \geqslant n$ и $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Матричные коэффициенты a_j и $Q = Q^*$ принадлежат подходящим $L_p(\Omega)$-классам. При сделанных предположениях оператор $B_{D,\varepsilon}$ сильно эллиптичен. Предполагается, что $B_{D,\varepsilon} \geqslant c_0 > 0$.

Нас интересует поведение при малом ε обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, где $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Здесь $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная матрица.

Теорема 1. *Пусть $\zeta = |\zeta| e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. При достаточно малом ε имеем*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{1}$$

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_2(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_3(\phi)\varepsilon. \tag{2}$$

Здесь B_D^0 — эффективный оператор с постоянными коэффициентами, матрица $\overline{Q_0} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega Q_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Оператор $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — корректор. Он содержит быстро осциллирующие множители и потому зависит от ε. При этом $\|K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2 \to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$. Величины $C_1(\phi)$, $C_2(\phi)$ и

$C_3(\phi)$ допускают контроль через данные задачи и $\phi = \arg\zeta$. Оценки (1), (2) *равномерны по углу ϕ в любой области вида $\{\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\}$, $\phi_0 > 0$.*

Результаты подобного сорта принято называть операторными оценками погрешности в теории усреднения. При фиксированном ζ оценка (1) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (2) хуже из-за влияния $\partial\mathcal{O}$. Метод основан на использовании результатов усреднения [1] для оператора, действующего во всем пространстве, и введении поправки типа пограничного слоя.

Получение двухпараметрических оценок мотивировано последующим приложением к параболическим задачам. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — обобщенное решение первой начально-краевой задачи

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -B_{D,\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ t>0, \\ \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t>0, \quad Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = -(2\pi i)^{-1}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\varphi}\,d\zeta$, где $\gamma\subset\mathbb{C}$ — подходящий контур, ориентированный положительно. Для решения $\mathbf{u}_0$ соответствующей эффективной задачи справедливо аналогичное представление. С помощью этого соображения и двухпараметрических оценок для обобщенной резольвенты мы получаем аппроксимации решения задачи (3).

Теорема 2. *При достаточно малом ε справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-C_5t}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t\geqslant 0,$$
$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_6(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-C_5t}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t>0.$$

Здесь $\mathbf{v}_\varepsilon$ — первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$. Постоянные C_4, C_5 и C_6 контролируются явно.

Для оператора $B_{D,\varepsilon}$ вида $b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ теорема 1 была доказана в [3], а теорема 2 — в [2].

Список литературы

[1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in* $\mathbb{R}^d$, Applicable Analysis **95**:7 (2016), 1413–1448.
[2] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Applicable Analysis **95**:8 (2016), 1736–1775.
[3] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27**:4 (2015), 87–166.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАФАХ

Мурзабекова Г.Е., Нуртазина К.Б.

КАТУ им.С.Сейфуллина, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан, Астана)
E-mail: guldenmur07@gmail.com

В [1]-[2] исследованы спектральные обратные задачи для волновых и тепловых уравнений на конечных деревьях. Задача восстановления функций решается рекурсивным методом [3]. В настоящем докладе мы распространяем этот метод на решение задачи идентификации источника для произвольных деревьев и графов с циклами.

Пусть $\Omega = E\cup V$ - конечный компактный метрический граф, где $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ - множество ребер и $V = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N+1}\}$ - множество вершин. Граф называется метрическим, если каждому ребру $e_j \in E$ соответствует интервал (a_{2j-1}, a_{2j}) положительной длины $l_j = |a_{2j-1} - a_{2j}|$. Рёбра соединяются вершинами ν_j, которые эквивалентны концевым точкам $\{a_j\}$ рёбер.

Полагаем $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} = \partial\Omega \subset V$ - граничные вершины, т.е. если индекс вершины, $id(\nu)$, - это количество рёбер, входящих в эту вершину, то $\partial\Omega = \{\nu\in V | id(\nu) = 1\}$. Допускаем, что $V\setminus\partial\Omega = \{\nu \in V \mid id(\nu) > 2\}$.

Система описывается параболическим уравнением на метрическом графе.

$$\partial_t u_j - \partial_x^2 u_j + q_j(x)u_j = p(t)h_j(x) \quad \text{на} \ \ e_j\times(0,T)\ \forall e_j\in E$$
$$\sum_{e_j\sim\nu}\partial u_j(\nu,t) = 0 \quad \text{для каждой вершины} \ \ \nu\in V\setminus\partial\Gamma,$$
$$u(\cdot,t) \quad \text{непрерывна в каждой вершине для} \ \ t\in[0,T]$$
$$\partial u = f \ \text{на} \ \partial\Gamma\times[0,T], \quad u|_{t=0} = 0 \ \text{на} \ \Gamma.$$

Здесь $\partial u_j(\nu, t)$ обозначает производную по ν, взятую вдоль ребра e_j в направлении от вершины. Также $e_j \sim \nu$ означает ребро e_j, входящее в вершину ν, и сумма берется по всем таким вершинам.

Для решения рассматриваемых задач используется предложенный в 80-х гг. Санкт-Петербургскими математиками метод граничного управления (BCM). Основная идея BCM заключается во взаимосвязи между проблемами идентификации и управляемости систем: если система управляема, то она идентифицируема. Для применения BCM используется оператор отклика $\tilde{R}^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$, который определяется как

$$(\tilde{R}^T f)(t) = u^f(\cdot, t)\big|_{\partial\Gamma}, \quad t \in [0, T].$$

Теорема. Оператор отклика $\tilde{R}^T$, известный для любого $T > 0$, единственным образом определяет топологию графа, длины рёбер, потенциалы q_j и источники $h_j, j = 1, \ldots, N$.

Преимущество BCM в его локальности. Пучок представляет собой граф, в котором все рёбра, кроме одного, граничные. Известно, что в любом дереве найдется хотя бы два пучка. Алгоритм осуществляется по шагам: 1) одно ребро рассматривается как интервал, при выполнении условий согласования Кирхгофа-Неймана восстанавливаем длину и неизвестные коэффициенты; 2) проверяем, какие рёбра сходятся в один пучок с данным ребром; 3) отрезаем пучок, пересчитываем данные уже на меньшем графе и т.д.

Если граф имеет циклы, то граничные наблюдения не гарантируют однозначную разрешимость задачи идентификации источника. Мы должны ввести дополнительные условия на внутренние вершины: общее число наблюдений, необходимое для решения обратной задачи $m - 1 + 2\gamma$, где m - это число граничных вершин, а γ - число независимых циклов.

Работа выполнена при поддержке МОН РК, грант № 4290/ГФ4.

Список литературы

[1] Avdonin S., Murzabekova G. *The inverse spectral problem for the wave equation on finite trees*// 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (2016), P. 151.

[2] Avdonin S., Bell J., Nurtazina K. *The problem of recovering function with leaf-peeling method*// 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (2016), P. 151.

[3] Avdonin S., Bell J., *Determining a distributed conductance parameter for a neuronal cable model defined on a tree graph*, Journal Inverse Problems and Imaging (2015), P. 645-659.

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ

Назаров А.К.

Южный федеральный университет (Россия, г. Ростов-на-Дону)

E-mail: arturnazarov7@mail.ru

Обоснован метод усреднения Крылова-Боголюбова для системы m дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, зависящих от большого параметра $\omega >> 1$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \big[\lambda_{ij}(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega}\mu_{ij}(x, t, \omega t)\big] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i(x, t, \omega t, u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x, t, \omega t, u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = g(x), \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, данные задачи (1)-(2) удовлетворяют определенным условиям, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^*$ - искомая вектор-функция, компоненты которой зависят от переменных x и t. При выполнении некоторых дополнительных предположений для систем вида (1)-(2) в случае, когда $\mu_{ij}(x, t, \omega t) \equiv \mu_{kj}(x, t, \omega t)$ $(1 \leqslant i, k \leqslant m)$, разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики решений, который базируется на методе двухмасштабных разложений. Нахождение коэффициентов асимптотики сводится, по существу, к решению конечного числа не зависящих от асимптотического параметра однозначно разрешимых задач Коши для систем линейных уравнений в частных производных 1-го порядка (см. [1],[3]).

При определенных условиях построена с обоснованием полная асимптотика решения задачи о $\dfrac{2\pi}{\omega}$ -периодических по времени t решениях системы параболических уравнений, зависящих от большого параметра $\omega >> 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x,u)e^{is\omega t} + \sqrt{\omega}\sum_{0<|s|\le m} \varphi_s(x,u)e^{is\omega t}, \quad (3)$$

$$u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0, \quad (4)$$

рассматриваемых в цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, где Ω - ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с C^∞ -гладкой границей $\partial\Omega$, $a_{ij}(x)$ — вещественные числа, $L_j(x)$ — квадратные матрицы порядка N с вещественными элементами, $f_s(x,u)$ и $\varphi_s(x,u)$ — N-мерные векторы, удовлетворяющие условиям $\overline{f}_s(x,u) = f_{-s}(x,u)$ и $\overline{\varphi}_s(x,u) = \varphi_{-s}(x,u)$, $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$. Построение каждого приближения $\overset{M}{u}$ сводится к решению M линейных однозначно разрешимых задач (см. [2]).

Список литературы

[1] Капикян А. К., Левенштам В. Б. *Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми* // Жур. выч. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 11. С. 2024–2041.

[2] Капикян А. К., Левенштам В. Б. *Асимптотика периодического решения системы параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы матем. гидродин. 2009. С. 106–112.

[3] Назаров А. К. *Усреднение уравнений в частных производных первого порядка* // Эколог. вестник науч. центров ЧЭС. 2015. №4. С. 62-68.

О ПОВЕДЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

Панов Е.Ю.

Новгородский государственный университет (Россия, Великий Новгород)

E-mail: Eugeny.Panov@novsu.ru

Рассмотрим задачу Коши для скалярного закона сохранения

$$u_t + \varphi(u)_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi = (0,+\infty) \times \mathbb{R} \quad (1)$$

с лишь непрерывной функцией потока $\varphi(u)$ и начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Напомним определение обобщенного энтропийного решения (о.э.р.) задачи (1), (2) в смысле С. Н. Кружкова [2].

Определение. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется о.э.р. задачи (1), (2), если:
a) $\forall k \in \mathbb{R}$

$$|u-k|_t + [\operatorname{sign}(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))]_x \le 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi);$$

b) $\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0} u(t,\cdot) = u_0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Предположим, что начальная функция u_0 является почти периодической в смысле Безиковича [1], точнее $u_0 \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$, где пространство Безиковича $\mathcal{B}^1(\mathbb{R})$ это замыкание тригонометрических полиномов относительно усредненной L^1-нормы $\|v\|_1 = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |v(x)|dx$. Основным результатом работы является следующая теорема о сходимости о.э.р. к бегущей волне.

Теорема 1. *Существует единственная почти-периодическая функция $v(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$ и константа $c \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$u(t,x) - v(x-ct) \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{в } \mathcal{B}^1(\mathbb{R}).$$

При этом, спектр функции $v(x)$ лежит в аддитивной подгруппе прямой $\mathbb{R}$, порожденной спектром начальной функции u_0, среднее значение $\bar{v}$ функции $v(x)$ совпадает со средним значением $\bar{u}_0$ начальных данных и $\varphi(u) - cu = const$ на максимальном отрезке $[\alpha(v), \beta(v)]$, содержащем существенные значения $v(y)$.

Если функция $\varphi(u)$ не линейна ни в какой окрестности точки $\bar{u}_0$, из Теоремы 1 вытекает, что $v(x) = \bar{u}_0$ в $\mathcal{B}^1(\mathbb{R})$ и значит

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,\cdot) = \bar{u}_0 \quad \text{в } \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$$

(свойство стабилизации). Справедлив и многомерный результат [3] о стабилизации почти-периодических о.э.р. В периодическом случае этот результат содержится в [4]. Случай периодических начальных данных докладывался на КРОМШ-2015, соответствующие результаты опубликованы в [5].

Работа поддержана РФФИ (грант № 15-01-07650-а) и Министерством Образования и Науки РФ (проекты № 1.857.2014/К, № 1.445.2016/ФПМ).

Список литературы

[1] A. S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions*, Cambridge University Press, 1932.

[2] С. Н. Кружков, *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными*, Матем. сб. 81 (1970), 228–255.

[3] E. Yu. Panov, *On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: global well-posedness and decay property*, J. Hyperbolic Differ. Equ., принято к печати.

[4] E. Yu. Panov, *On a condition of strong precompactness and the decay of periodic entropy solutions to scalar conservation laws*, Networks and Heterogeneous Media 11:2 (2016), 349–367.

[5] Е. Ю. Панов, *Об асимптотике при больших временах периодических обобщенных энтропийных решений скалярных законов сохранения*, Матем. заметки 100:1 (2016), 132–142.

ОБ ОЦЕНКАХ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пастухова С.Е.

Московский технологический университет (Россия, Москва)

E-mail: pas-se@yandex.ru

Рассмотрим задачу диффузии в периодической среде

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \quad A = -div(a(x)\nabla), \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = f \in C_0^\infty(R^d). \end{cases} \tag{1}$$

Матрица диффузии a измерима, симметрична, 1-периодична с ячейкой периодичности $Y{=}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ и подчинена условию

$$\nu\xi^2{\le}a(x)\xi\cdot\xi{\le}\nu^{-1}\xi^2 \quad \forall\xi{\in}R^d,\ \nu{>}0.$$

Имеем неотрицательный самосопряженный оператор A в $L^2(R^d)$, как следствие, существует полугруппа e^{-tA}, $t{\ge}0$, и решение задачи (1) можно понимать в смысле полугруппы $u(\cdot,t) = e^{-tA}f(\cdot)$. Отправной точкой будет следующий результат об эффективной диффузии, установленный в [1],[2].

Теорема 1. *Найдется постоянная симметрическая матрица $a^0{>}0$, такая что*

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0}\|_{L^2(R^d)\to L^2(R^d)} \le ct^{-\frac{1}{2}}, \quad c = const(d,\nu), \tag{2}$$

где $A_0{=}-div(a^0\nabla)$.

Для точного определения матрицы a^0 используются задачи:

$$N_j{\in}H^1_{per}(Y),\ -div\, a(\nabla N_j + e_j){=}0,\ \langle N_j\rangle = 0, \quad j = 1,\ldots,d,$$

где $e_1,\ldots,e_d$ – канонический базис в R^d. Матрица a^0 задана соотношениями

$$a^0 e_j = \langle a(\nabla N_j + e_j)\rangle, \quad j = 1,\ldots,d.$$

Здесь и далее $\langle\cdot\rangle = \int_Y \cdot\, dx$ – среднее по ячейке периодичности.

Нашим основным результатом является доказанная в [3]

Теорема 2. *Справедлива L^s-оценка*

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0}\|_{L^s(R^d)\to L^s(R^d)} \le ct^{-\frac{1}{2}} \quad \forall s \in [1,\infty] \tag{3}$$

с единой константой для всех s, где оператор A_0 тот же, что в (2).

Для вывода оценки (3) изучается асимптотика фундаментального решения задачи (1) при $t\to\infty$, строятся его приближения с поточечной и интегральной оценками различного порядка по убывающим степеням t (см. подробности в [3]).

В [3] доказан и более общий результат, относящийся к оператору диффузии в потоке. В этом случае имеем несамосопряженный оператор $A = -div(a(x)\nabla) + b(x) \cdot \nabla$, где матрица диффузии a та же, что выше, а снос в потоке задается 1-периодическим вектором $b \in L^{\infty}_{per}(Y)$.

Теорема 3. *Найдутся постоянная симметрическая матрица $a^0>0$, вектор $\mu \in R^d$ и 1-периодическая непрерывная положительная функция p, нормированная условием $\langle p \rangle = 1$, такие что*

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0}p\|_{L^s(R^d)\to L^s(R^d)} \le ct^{-\frac{1}{2}} \quad \forall s \in [1,\infty]$$

с единой константой для всех s. Здесь оператор эффективной диффузии имеет вид $A_0 = -div(a^0\nabla) + \mu \cdot \nabla$; матрица a^0, вектор μ и функция p определяются через решения вспомогательных периодических задач на ячейке Y.

Список литературы

[1] Т. А. Суслина, *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., 38:4 (2004), 86—90.

[2] V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova, *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russian Journal of Math. Physics, **13:2**(2006), №2, 224–237.

[3] В.В. Жиков, С.Е. Пастухова, *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук, **73**:3(2016), 27–122.

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ С ШАРОВЫМИ ПОЛОСТЯМИ

Пикулин С.В.

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН (Россия, Москва)

E-mail: spikulin@gmail.com

В теории движения неньютоновой жидкости [1], при рассмотрении некоторых реакционно–диффузионных моделей [2], а также в других приложениях [3] возникают краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений следующего вида:

$$\begin{gathered} \Delta_{\mathrm{p}} u(x) - f(u) = g(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u(x) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где Ω — некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, оператор Δ_{p} определен равенством

$$\Delta_{\mathrm{p}}\, u(x) = \operatorname{div}\big(|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x)\big), \qquad p = \mathrm{const} > 1,$$

$f(u), g(x), \varphi(x)$ — некоторые заданные функции.

Для уравнения вида (1) с показателем $p > 1$ в докладе будет дано обобщение результата работы [4] о сходимости семейства решений эллиптического уравнения с линейной главной частью дивергентного вида в областях, содержащих полости, при стремлении размера полостей к нулю (данный результат относится, в частности, к уравнению (1) при $p = 2$ и $f(u) = |u|^{q-1} u$).

Рассмотрим ограниченную липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и зафиксируем некоторую точку $y \in \Omega$. Обозначим через Ω_ε область, получаемую из Ω исключением шара $B(y,\varepsilon)$ малого радиуса ε с центром в точке y. Рассмотрим следующее семейство задач Дирихле:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big(|\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u_\varepsilon(x)\big) - a_0\, |u_\varepsilon(x)|^{q-1}\, u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x) \quad \text{на} \quad \partial B(y,\varepsilon), \end{cases} \tag{2}$$

где $p \in (1, n)$, $q > 0$, $\varphi(x)$ — граничная функция класса $W_p^{1-1/p}\big(\partial B(y,\varepsilon)\big)$, $a_0 = \mathrm{const} > 0$, ε — параметр семейства. Решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (2) рассматривается в классе $W_p^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_\infty(\Omega_\varepsilon)$ и понимается в смысле распределений.

Допустим, что входящие уравнение (2) показатели p и q удовлетворяют условию

$$q > \frac{n+p}{n-p}. \tag{3}$$

Вводя новые величины β и $\varkappa_1$, переформулируем неравенство (3) в следующем виде:

$$\beta := p\,\frac{q+1}{q-1} - 1 < n - 1, \qquad \varkappa_1 := \frac{n-1}{\beta} > 1. \tag{4}$$

Теорема. *Предположим, что выполнены неравенства* (3), (4). *Выберем число* $\varkappa \in [1, \varkappa_1]$ *и последовательность* $\delta_\varepsilon \sim \varepsilon^{\varkappa}$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(y,\varepsilon+\delta_\varepsilon)} \big(|\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^p + |u_\varepsilon(x)|^{q+1}\big)\,dx = O\big(\varepsilon^{n-1-\varkappa\beta}\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Отметим, что утверждение теоремы остается справедливым вне зависимости от того, насколько быстро возрастают граничные функции $\varphi_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00781.

Список литературы

[1] Астарита Дж., Марруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей*, М. : Мир, 1978.
[2] Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, Vol. I, , Oxford University Press, New York, 1975.
[3] Pelissier M.-C. *Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie*, Thèse, Publ. Math. d'Orsay, 110 (1975).
[4] Пикулин С. В. *Сходимость семейства решений уравнения типа Фуджиты в областях с полостями*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:11 (2016), 86–115 (в печати).

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ В ВОЛНОВОДАХ

Пламеневский Б.А., Сарафанов О.В.

Санкт-Петербургский государственный университет (Россия, Санкт-Петербург)
E-mail: o.sarafanov@spbu.ru

Волновод занимает область G в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, и вне большого шара совпадает с объединением конечного числа непересекающихся полуцилиндров ("цилиндрических выходов"). Волновод описывается оператором $\{L(x, D_x) - \mu, B(x, D_x)\}$ эллиптической краевой задачи в G, где L — матричный дифференциальный оператор, B — оператор граничных условий, а μ — спектральный параметр. Оператор $\{L, B\}$ предполагается самосопряженным относительно формулы Грина. В качестве L может выступать, например, оператор Гельмгольца, оператор системы Ламе в теории упругости или оператор системы Стокса в гидродинамике. Приближением для строки матрицы рассеяния $S(\mu)$ служит минимизатор квадратичного функционала $J_R(\cdot, \mu)$. Чтобы построить этот функционал, мы решаем вспомогательную краевую задачу в ограниченной области, полученной из G отрезанием цилиндрических выходов на расстоянии R. При $R \to \infty$ минимизатор $a(R, \mu)$ стремится с экспоненциальной скоростью к соответствующей строке матрицы рассеяния равномерно на любом замкнутом интервале непрерывного спектра, не содержащем порогов. Этот интервал может содержать собственные числа волновода, которым отвечают собственные функции, экспоненциально убывающие на бесконечности ("ловушечные моды"). Такие собственные числа, как правило, возникают в волноводах сложной геометрии. Поэтому возможность в приложениях не заботиться о (возможно, не обнаруженных) ловушечных модах оказывается важным преимуществом метода.

Список литературы

[1] Пламеневский Б. А., Сарафанов О. В. *О методе вычисления матриц рассеяния для волноводов* // Алгебра и Анализ, Т. 23 (2011), № 1. Стр. 200–231; English translation: St. Petersburg Math. J., V. 23 (2012) , № 1. P. 139–160.
[2] Пламеневский Б. А., Сарафанов О. В. *О методе вычисления волноводных матриц рассеяния в присутствии точечного спектра* // Функциональный анализ и его приложения, Т. 48 (2014), № 1, Стр. 61–72; English translation: Functional Analysis and Its Applications, V. 48 (2014), № 1, P. 49–58.
[3] Пламеневский Б. А., Порецкий А. С., Сарафанов О. В.*Метод вычисления волноводной матрицы рассеяния в окрестности порогов*, Алгебра и Анализ, V. 26 (2014), № 1, Стр. 128–164; English translation: St.Petersburg Math. J., V. 26 (2015), № 1, P. 91–116.

ДИНАМИКА СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

Плышевская С.П.

Таврическая академия Крымского федерального университета имени В.И.Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: splyshevskaya@email.ru

Рассматривается динамика стационарных структур в параболическом уравнении [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \Lambda u^2 - u^3, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \tag{2}$$

где μ, Λ - положительные параметры.

Теорема. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $0<1-\mu<\delta$ задача* (1)-(2) *имеет две стационарные точки*

$$u_1 = \varphi_1(x,\mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x,\mu),$$

где функция $\varphi_1(x,\mu)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x,\mu) = (z\cos x + z^2 p_2(x,\mu) + z^3 p_3(x,\mu) + z^4 p_4(x,\mu) + z^5 p_5(x,\mu) + r(z,x,\mu))\,|_{z=z(\mu)},$$

$r(z,x,\mu) = O(|\, z\,|^5)$, *а $z(\mu) > 0$ - непрерывная ветвь стационарных точек уравнения*

$$\dot z = \lambda_1(\mu) z + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1+2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)}\right) z^3 + c_5 z^5 + \ldots,$$

где $\lambda_k = 1 - k^2\mu, \quad k = 1, 2, \ldots.$

Здесь

$$p_2 = \frac{\Lambda}{2(-1+2\lambda_1)} + \frac{\Lambda}{2(2\lambda_1-\lambda_2)}\cos 2x, \;\; p_3 = \frac{2\Lambda^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2}{4(2\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}\cos 3x,$$

$$\begin{aligned}
p_4 = &-\frac{3\Lambda^3}{4(-1+2\lambda_1)^2(-1+4\lambda_1)} - \frac{\Lambda^3}{2(-1+2\lambda_1)(-1+4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} - \\
&-\frac{3\Lambda}{8(-1+4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{\Lambda^3}{8(-1+4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)^2} - \frac{3\Lambda}{4(-1+2\lambda_1)(4\lambda_1-\lambda_2)}\cos 2x - \\
&-\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1-\lambda_2)^2(4\lambda_1-\lambda_2)}\cos 2x - \frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)(-1+2\lambda_1)}\cos 2x + \\
&+\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}\cos 2x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}\cos 2x + \\
&+\frac{\Lambda^3}{8(2\lambda_1-\lambda_2)^2(4\lambda_1-\lambda_4)}\cos 4x - \frac{3\Lambda}{8(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_4)}\cos 4x + \\
&+\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_4)(3\lambda_1-\lambda_3)}\cos 4x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1-\lambda_4)(3\lambda_1-\lambda_3)}\cos 4x, \ldots
\end{aligned}$$

Стационарные точки $u_1 = \varphi_1(x,\mu)$, $u_2 = \varphi_1(\pi - x,\mu)$ неустойчивы с индексом неустойчивости 1.

При $\Lambda = 0.001$ был проведен анализ галёркинской 30-ти модовой аппроксимации задачи (1)-(2). Согласно этому анализу стационарные решения являются неустойчивыми с индексом неустойчивости 1 на всём промежутке $(0,1)$ изменения параметра μ. Подчеркнём, что при малых μ $\varphi_1(x,\mu)$ является решением (1)-(2) типа внутреннего переходного слоя с одной точкой перехода, которая приближается к 0 при $\mu \to 0$. При прохождении параметра μ через значение $\frac{1}{k^2}$ пара стационарных решений $u = \varphi_k(x,\mu)$, $u = \varphi_k(\pi - x,\mu)$ рождается неустойчивой с индексом неустойчивости k и сохраняет индекс неустойчивости k при дальнейшем уменьшении параметра μ.

Список литературы

[1] Хенри Д., *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, М.: Мир (1985), 376 с.

ИНТЕГРАЛЫ С ОДНОРОДНО-РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Солдатов А.П.

НИУ БелГУ (Белгород, Россия)

E-mail: soldatov48@gmail.com

Рассматриваются в области D комплексной плоскости двумерные сингулярные интегралы вида $\psi(z) = \int\limits_D Q_2(t, t-z)\varphi_2(t) d_2 t,\ z \in D$, и обобщенные интегралы типа Коши $\phi(z) = \int\limits_\Gamma Q_1(t, t-z)\varphi_1(t) d_1 t,\ z \in D$, где ядро $Q_k(t,\xi)$ однородно степени $-k$ по переменной $\xi \in \mathbb{C}$ и кривая $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$. Подобные интегралы возникают при исследовании эллиптических краевых задач.

Обсуждаются условия, обеспечивающие принадлежность функций ϕ и ψ классу Гельдера $C^\mu(\overline{D})$. Рассмотрен также случай интегралов с L^p плотностью. Даны приложения к задаче Римана- Гильберта для эллиптической системы первого порядка с непрерывными коэффициентами.

О НЕОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С p–ЛАПЛАСИАНОМ

Солонуха О.В.

ЦЭМИ РАН (РФ, Москва)

E-mail: solonukha@yandex.ru

Рассматривается разрешимость нелинейной нелокальной задачи p-Лапласианом, являющейся обобщением задачи типа Бицадзе-Самарского. Сформулированы теоремы о достаточных условиях разрешимости. Результаты проиллюстрированы примерами, которые рассматривались ранее в линейной теории (при $p = 2$). Эти примеры показывают,что в отличие от линейного случая при тех же "хороших"нелокальных граничных условиях для $p > 2$ в зависимости от правой части задача может иметь одно или несколько решений.

Эта работа поддержана грантом РФФИ №16-01-00450А.

Список литературы

[1] Skubachevskii A.L. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications.* Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
[2] Солонуха О.В. *Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально–разностных уравнений*, Труды Математического ин-та им. В.А.Стеклова, **283** (2013), 226–244.
[3] Solonukha O.V. *On nonlinear and quasilinear elliptic functional–differential equations*, Discrete and Continuous Dynamic Systems, Seria S, **9**, N3 (2016), 847–868.

К ТЕОРИИ ОСОБОГО СЛУЧАЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ КОШИ

Урбанович Т.М.

Полоцкий государственный университет (Беларусь, Полоцк)

E-mail: UrbanovichTM@gmail.com

Исследуется особый случай характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши, когда его коэффициенты допускают нули или особенности комплексного порядка в конечном числе точек контура. Методом сведения к задаче линейного сопряжения [1] найдены явная формула решения и условия разрешимости данного уравнения в весовых классах Гёльдера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Ф14КАЗ-034 "Операторные методы решения общих краевых задач для уравнений с частными производными и их приложения".

Список литературы

[1] *Урбанович, Т. М.* Исключительный случай задачи линейного сопряжения в весовых классах Гёльдера // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1689-1693.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА

Фаминский А.В.

Российский университет дружбы народов (Россия, Москва)

E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

Уравнение Захарова–Кузнецова является одним из вариантов многомерного обобщения уравнения Кортевега–де Фриза. Рассматриваются случаи 2-х пространственных переменных

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0 \tag{1}$$

и 3-х пространственных переменных

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} + uu_x = 0. \tag{2}$$

Эти уравнения описывают нелинейные волны в средах с дисперсией, распространяющиеся в x-направлении с деформациями в поперечных направлениях.

Теория начально-краевых задач, разумеется, лучше развита для двумерного случая, хотя здесь она также далека от завершения. Наиболее сложна для изучения ситуация, когда переменная y рассматривается на ограниченом интервале. Некоторые результаты о глобальной корректности таких задач можно найти, например, в статье [1].

В недавней работе [3] аналогичные результаты были установлены в трехмерном случае. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2_{y,z}$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей, $\Sigma = \mathbb{R}_x \times \Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу с граничными условиями

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y,z), \qquad u\big|_{(0,T)\times\partial\Sigma} = 0 \tag{3}$$

при произвольном $T > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $(1+x_+)^{3/4}u_0 \in H^1_0(\Sigma)$. *Тогда существует единственное слабое рашение задачи* (2), (3) *такое, что* $(1+x_+)^{3/4}u \in L_\infty(0,T;H^1_0(\Sigma))$. *Более того,* $u \in L_2(0,T;H^2(I\times\Omega))$ *для любого ограниченного интервала* $I \subset \mathbb{R}$.

Аналогичный результат получен в случае задачи Коши

Установлены также результаты об убывании слабых решений при больших временах в случае малых начальных данных.

Теорема 2. *Существуют* $\alpha_0 > 0$, $\epsilon_0 > 0$ *и* $\beta > 0$ *такие, что если* $(1+e^{\alpha x})u_0 \in L_2(\Sigma)$ *для* $\alpha \in (0,\alpha_0]$ *и* $\|u_0\|_{L_2(\Sigma)} < \epsilon_0$, *то существует слабое решение задачи* (2), (3), *для которого справедливо неравенство*

$$\|e^{\alpha x}u(t,\cdot,\cdot,\cdot)\|_{L_2(\Sigma)} \le e^{-\alpha\beta t}\|e^{\alpha x}u_0\|_{L_2(\Sigma)} \qquad \forall t \ge 0.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1.

Список литературы

[1] E.S. Baykova, A.V. Faminskii, *On initial-boundary-value problems in a strip for the generalized two-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation*, Adv. Differential Equ. 18 (2013), 663–686.

[2] A.V. Faminskii, *An initial-boundary value problem for three-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation*, J. Differential Equ. 260 (2016), 3029–3055.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Хазова Ю.А.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Рассматривается уравнение на окружности S^1 :

$$\dot{u} = Du_{\varphi\varphi} - u - \Lambda Qu + \Lambda \frac{1}{3!} \cdot Qu^3, \tag{1}$$

где $Qu(x,t) - u(x + \frac{2\pi}{3}, t)$, $u(x + 2\pi, t) = u(x,t)$, $L(D)u = Du_{\varphi\varphi} - u - \Lambda Qu$.

Собственными функциями оператора L, рассматриваемого в качестве неограниченного оператора на пространстве $L_2(S^1)$ и областью определения $H^2(S^1)$, являются функции $\exp(ikx)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ясно, что собственными значениями будут

$$\lambda_k(D) = -1 - k^2 D - \Lambda \exp\left(ik\frac{2\pi}{3}\right).$$

Нулевое решение (1) экспоненциально устойчиво. При уменьшении D и его прохождении через бифуркационное значение D^*, нулевое решение теряет устойчивость. Пара комплексно сопряженных точек спектра проходят через мнимую ось с нулевой скоростью. В результате от нулевого решения (1) бифурцирует однопараметрическое семейство периодических по t решений типа бегущих волн. Воспользуемся методом центральных многообразий для построения представления этих бегущих волн.

$$u = z\exp(i\varphi) + \overline{z}\exp(-i\varphi) + \sigma_3(z, \overline{z}, \varphi) + \ldots, \tag{2}$$

где $\sigma_3(z, \overline{z}, \varphi)$ – форма третей степени.

$$\dot{z} = \lambda_1 z + c_3|z|^2\overline{z} + \ldots. \tag{3}$$

Подставив (2), (3) в (1) и преобразовав полученной выражение, получаем решение для формы третей степени:

$$c_3 = 3\exp(\frac{2}{3}i\pi), \tag{4}$$

$$\sigma_3(z, \overline{z}, \varphi) = \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} z^3 + \frac{1}{3\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_3}\overline{z}^3. \tag{5}$$

Подставим (4), (5) в (3) и тогда из полученного уравнения видно, что периодическое решение имеет вид:

$$z = \rho_1 \exp(i\omega_1 t), \tag{6}$$

где $\rho_1 = \rho_1(D) > 0$ непрерывная ветвь решений уравнения

$$\operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re} c_3\rho_1^2 = 0, \qquad \omega_1 = \operatorname{Im}\lambda_1 + \operatorname{Im} c_3\rho_1^2.$$

Следовательно, приближенным периодическим решением исходной задачи является:

$$u_1(z, \varphi, t) = z\exp(i\varphi) + \overline{z}\exp(-i\varphi) + \sigma_3(z, \overline{z}, \varphi)|_{z=\rho_1\exp(i\omega_1 t), \overline{z}=\rho_1\exp(-i\omega_1 t)} =$$
$$= \rho_1(D)\cos\theta + a_3(D)\cos 3\theta + b_3(D)\sin 3\theta + \ldots.$$

Список литературы

[1] Белан, Е.П., Хазова, Ю.А. *Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной*Динамические системы, Т.4, (2014), с.43-57.

[2] Белан Е.П. *Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной*Кибернетика и системный анализ, Т.46, № 5 (2010), с.95-111.

[3] Fusco G., Hale J.K. *Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations*Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol.1, № 1 (1989), P.75-94.

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Чаплыгина Е.В.

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева (Россия, Орел)

E-mail: lena260581@yandex.ru

Уравнение

$$U_{xx}(x,y) + sgny U_{yy}(x,y) = U(\alpha_1(x),y)U(\alpha_2(x),y), \tag{1}$$

где $\alpha_1(x) < x, \alpha_1'(x) > 1(\alpha_1'(x) < 1)$ и $\alpha_2(x) < x, \alpha_2'(x) < 1(\alpha_2'(x) > 1)$ - гомеоморфные растягивающе (сжимающе)-запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения сохраняющие ориентацию, причем $\alpha_1(\alpha_2(x)) = \alpha_2(\alpha_1(x)) = x$, рассматривается в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, если $D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup J = \{(x,y) : x_0 < x < x_2, 0 < y < h\}(0 < h \equiv const)$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^-$ - эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\}(k = -1,0,1,2),$$

$$D_k^- = \{(x,y) : -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\}(k = -1,0,1,2),$$

$$I = \{(x,y) : x_0 < x < x_2, y = 0\}, J = \{(x,y) : x = x_1, 0 < y < h\}$$

и $\alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x), \alpha_1^0(x) = x, \alpha_1^1(x) = \alpha_1(x), \alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x))$, а $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$.

Задача G. Найти в области D решение $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \backslash J) \cap C^2(D \backslash (I \cup J))$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x_0,y) = U(x_2,y) = 0, 0 \le y \le h;$$

$$U(x,h) = \varphi(x), x_0 < x < x_2;$$

$$U(x,-x) = \psi_0(x), x_0 \le x \le x_1/2;$$

$$U(x,\alpha_1(x) - x_1) = \psi_1(x), (x_1 + x_2)/2 \le x \le x_2;$$

$$U(x,y) = g(\alpha_2(x) + y\sqrt{-sgny})g(\alpha_2(x) - y\sqrt{-sgny}), (x,y) \in \bar{D}_{-1};$$

$$U(x,y) = g(\alpha_1^2(x) + y\sqrt{-sgny})g(\alpha_1^2(x) - y\sqrt{-sgny}), (x,y) \in \bar{D}_2;$$

условиям сопряжения

$$U(x,0-) = U(x,0+) = \omega(x), U_y(x,0-) = U_y(x,0+) = \nu(x), x_0 < x < x_2, x \ne x_1;$$

условиям согласования

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_2) = \psi_0(x_0) = \psi_1(x_2) = 0,$$

где $\varphi(x), \psi_k(x)(k = 0,1), g(x)$ - заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХОПФА

Чугайнова А.П.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия, г. Москва)

E-mail: anna_ch@mi.ras.ru

Изучаются решения задачи о распаде произвольного разрыва обобщенного уравнения Хопфа.

Построены автомодельные решения задачи о распаде произвольного для обобщенного уравнения Хопфа для различных начальных данных, состоящие из последовательностей допустимых разрывов и неопрокидывающихся простых волн [1]. Допустимыми разрывами считаются разрывы со стационарной или нестационарной устойчивой структурой. Введение требования устойчивости структуры в понятие допустимости разрывов привело к существенному сокращению множества допустимых разрывов, описанных в [2, 3], и ликвидировало неединственность решения задачи о распаде произвольного разрыва, обнаруженную в предыдущих исследованиях [2]. При построении решения задачи использовались также разрывы со структурой, содержащей внутренние периодические колебания. Изменения величин в таких разрывах могут не совпадать с изменениями величин в каких-либо разрывах со стационарной структурой. Показано, что решение задачи о распаде произвольного разрыва в указанной постановке всегда существует и единственно.

Список литературы

[1] Куликовский А.Г.,Чугайнова А.П., Шаргатов В.А., *Единственность автомодельных решений задачи о распаде произвольного разрыва уравнения Хопфа со сложной нелинейностью*, Журнал вычислительной математики и математической физики, 56:7 (2016), 1363—1370

[2] Куликовский А.Г. *О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов*, Докл. АН СССР, 275:6 (1984), 1349–1352

[3] Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. *Моделирование влияния мелкомасштабных дисперсионных процессов в сплошной среде на формирование крупномасштабных явлений*, Журнал вычислительной математики и математической физики, 44:6 (2004), 1119–1126

PARABOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS IN HALF-SPACES

Andrey Muravnik

JSC “Concern “Sozvezdie” (Russia, Voronezh), RUDN University (Russia, Moscow)

E-mail: amuravnik@yandex.ru

We investigate the Cauchy problem for second-order differential-difference parabolic equations. We prove the existence of classical solutions and find their uniqueness classes and integral representations with Poisson-like kernels. Qualitative properties of the said solutions are investigated as well: assuming the strong ellipticity of the corresponding functional-differential operators, we prove theorems on their nonclassical (weight asymptotic) closeness to solutions of differential parabolic equations.

VLASOV–POISSON EQUATIONS WITH EXTERNAL MAGNETIC FIELD AND PLASMA CONFINEMENT

A.L. Skubachevskii

RUDN University (Russia, Moscow)

E-mail: skub@lector.ru

We consider the Vlasov-Poisson equations in infinite cylinder with the Dirichlet or nonlocal boundary condition for electric potential [1, 2]. The Vlasov-Poisson system describes evolution of electric potential and distribution functions for densities of charged particles in high-temperature rarefied plasma. The cylindrical shape of domain corresponds to thermonuclear reactor that is called "mirror trap". We study classical solutions with supports of distribution functions strictly inside domain. Such solutions are modelling plasma confinement. We obtain sufficient conditions for existence and uniqueness of such solutions in Hölder spaces.

This work was partially supported of RFBR (grant N 16-01-00450A).

References

[1] A.L.Skubachevskii, *Vlasov–Poisson equations for a two–components plasma in a homogeneous magnetic field*, Russain Math. Surveys, **69**:2 (2014), 291–330.

[2] A.L.Skubachevskii, *Nonlocal Elliptic Problems in Infinite Cylinder and Applications*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S, **9** (2016), 847–868.

Секция 5. Теория управления и экстремальные задачи

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ, УПРАВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Белоусов Ф.А.

ЦЭМИ РАН (Россия, Москва)

E-mail: sky_tt@list.ru

Рассматривается вариационная задача (1)-(4) с отклонениями аргумента в фазовых переменных и их производных, а также управляемыми граничными условиями.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(q_1(t)), \ldots, x(q_s(t)), \dot{x}(q_1(t)), \ldots, \dot{x}(q_s(t)))dt \to \inf \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\dot{x}(t) = u(t), \qquad t \in I \backslash [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$x(t_0) = x^0, \qquad x(t_1) = x^1, \tag{3}$$

$$(x(t_0) = x^0) \tag{3a}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in I \backslash [t_0, t_1], \quad U = \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Здесь $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса C и по второй группе $n(s+1)$ переменных непрерывно дифференцируемо; $q_j(.) \in Diff^1_+(\mathbb{R}), j = 1, \ldots, s$ — диффеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию;

$$I = [r_0, r_1], r_0 = min\{t_0,\, q_1(t_0), \ldots, q_s(t_0)\}, r_1 = max\{t_1, q_1(t_1), \ldots, q_s(t_1)\}.$$

Задача (1)-(4) называется задачей с закрепленными концами. Если условие (3) заменить на условие (3a), то получим задачу со свободным правым концом.

Для такой системы получены необходимые условия экстремума в виде уравнения Эйлера-Лагранжа, а также условия трансверсальности. Полученное уравнение Эйлера-Лагранжа представляет собой функционально-дифференциальное уравнение точечного типа второго порядка с составной структурой. Приведены примеры решений соответствующих задач.

Список литературы

[1] Бекларян Л.А., Бекларян А.Л., Белоусов Ф.А. *Задача управления граничными условиями в вариационной задаче с отклонениями аргумента*, Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. (2015), . Т.20. №6. с. 1736-1747.

[2] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.*, М.: Наука, 1971.

[3] Арутюнов А.В. *Принцип максимума и необходимые условия второго порядка в задаче оптимального управления при наличии запаздывания*, Сообщ. АН ГССР (1986), Т. 122, с. 265-268.

[4] Бекларян Л.А. *Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов R, порожденной функциями отклонения*, Доклады АН СССР (1991), Т.317, №6, с. 1289-1294.

[5] Бекларян Л.А. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений и их приложений. Групповой подход.*, М.: ФАКТОРИАЛ, 2007, с. 288.

[6] Beklaryan L.A. . *Group Specialities in the Problem of the Maximum Principle for Systems with Deviating Argument*, Journal Dynamical and Control Systems, (2012), V. 18, №1, p. 21-34.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, гранты №16-01-00110 и №15-37-20265

О НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет (КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева (Россия, г. Казань)

E-mail: ggbil2@gmail.com , bilchnat@gmail.com

Работа является продолжением [1]: сохранены обозначения и сокращения.

1. Для рассмотренных в [2] *интерполяционной* и *аппроксимационной* постановок ОЗ тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) предложены алгоритмы восстановления управления. Близость $q^\sim$ к $q^\vee$ в *интерполяционном* смысле означает, что $q_j^\sim$ с заданной точностью $\varepsilon_1 > 0$ должны совпадать с $q_j^\vee$: $R_\infty(q^\sim; q^\vee) = \max_{j=0,\ldots,n_2} \left| q_j^\sim - q_j^\vee \right| \le \varepsilon_1$. Пусть $R_p(q^\sim; q^\vee) = \left(\sum_{j=0}^{n_2} \left| q_j^\sim - q_j^\vee \right|^p \right)^{1/p}$. Близость $q^\sim$ к $q^\vee$ в *аппроксимационном* смысле означает, что для заданного $p \in [1; +\infty]$ требуется найти пару $(m^\sim; q^\sim)$, где $m^\sim$ является решением экстремальной задачи $R_p^*(q^\vee) = \inf_{m^\sim} R_p(q^\sim; q^\vee)$.

Замечание. Если $(m^\sim; q^\sim)$ и $(m^\approx; q^\approx)$ – два решения, а $R(q^\sim; q^\vee) \le \varepsilon_1$ и $R(q^\approx; q^\vee) \le \varepsilon_1$, то $R(q^\sim; q^\approx) \le 2 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Т.о., $(m^\sim; q^\sim)$ и $(m^\approx; q^\approx)$ в пределах точности ε_2 не различимы.

В виде программы реализован алгоритм *интерполяционного* построения вдува, который для **заданных** сетки $X_1 = X_2$, последовательности контрольных значений $q^\vee$, погрешности $\varepsilon_1 > 0$ и ограничений I: **либо** строит кусочно–линейное на X_1 управление $m^\sim(x)$, **либо** сообщает о невозможности такого восстановления и предлагает найти аппроксимационное решение. В виде программы реализован алгоритм *аппроксимационного* восстановления вдува, который для **заданных** значений $\varepsilon_1 > 0$, p, сеток X_1, X_2, значений $q^\vee$ и ограничений I строит последовательные приближения ${}_i m^\sim$. При нахождении решения $({}_i m^\sim; {}_i q^\sim)$ со значением $R_p({}_i q^\sim; q^\vee) \le \varepsilon_1$ поиск завершается. Если задано $\varepsilon_1 < R_p^*(q^\vee)$, то процесс завершается при построении решения $({}_\bullet m^\sim; {}_\bullet q^\sim)$ в пределах машинной точности. Полученное $R_p({}_\bullet q^\sim; q^\vee)$ может быть использовано в качестве оценки $R_p^*(q^\vee)$. Вместо $q^\vee$ может быть использована последовательность значений локального НТ $f^\vee$. Таким образом, программа позволяет тестировать на *реализуемость* на поверхности ГЛА последовательности значений локальных ТП $q^\vee$ или НТ $f^\vee$.

2. С помощью программы, реализующей прямую задачу [3], были получены последовательности значений локальных ТП q_{dir} и НТ f_{dir} для законов вдувов $m_{dir}(x)$, обобщающих рассмотренные в [4], при различных постоянных законах $\tau_{w,dir} \in \{0,10; 0,15; \ldots; 0,90\}$ для высоты полёта $H = 10$ [км], числа Маха $M_\infty = 10$, радиуса затупления тела $R = 0,1$ [м] и значений магнитного комплекса $\sigma B_0^2 \in \{0; 5 \cdot 10^4\}$ [Тл/Ом $\cdot$ м] (в обозначениях [3], [4]). К $q^\vee = q_{dir}$ и к $f^\vee = f_{dir}$ была применена процедура интерполяционного построения вдува $m^\sim(x)$ при различных постоянных законах ТФ $\tau_{w,inv} \in \{0,10; 0,15; \ldots; 0,90\}$ с ограничением $m^\sim(x) \in I(x) = [b; t]$ для $b(x) \ge 0$ и $t(x) \le 1$, где $x \in X = [0; 1]$. Установлены предельные значения $\tau_{w,inv}^*$, при которых восстановление вдува возможно, а также зависимости $\tau_{w,inv}^*(b, t; \tau_{w,dir})$. С помощью процедуры аппроксимационного восстановления вдува получены оценки $R_p^*(q^\vee)$ и $R_p^*(f^\vee)$.

Работа выполнялась в рамках проектной части государственного задания №13.262.201.2014К.

Список литературы

[1] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. *О возможности восстановления управления в некоторых обратных задачах тепломассообмена*, Междунар. конф. «XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа» КРОМШ–2016. Сборник тезисов, Батилиман (Ласпи), 17 – 29 сентября 2016 г.

[2] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. *Об одной обратной задаче тепломассообмена*, «Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2016.– № 2.– Ч. 2.– С. 50–56. – URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf (дата обращения: 12.07.2016).

[3] Бильченко Н. Г. *Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа*, Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016.– № 1.– С. 5–14.

[4] Бильченко Н. Г. *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува*, Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.– 2015.– № 1.– С. 95–102.

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Бильченко Г. Г. , Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет (КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева (Россия, Казань)

E-mail: ggbil2@gmail.com , bilchnat@gmail.com

1. Для рассмотренной в [1], [2] *прямой* задачи: по заданным управлениям – температурному фактору (ТФ) $\tau_w(x) = T_w(x)/T_{e_0}$ и вдуву в ламинарный пограничный слой (ПС) $m(x)$, где $x \in [0;1]$, **требуется** рассчитать параметры модели ПС и определить: локальные тепловой поток (ТП) $q(x;m;\tau_w)$ и напряжение трения (НТ) $f(x;m;\tau_w)$, интегральные тепловой поток $Q(m;\tau_w)$ и силу трения $F(m;\tau_w)$, а также мощность $N(m;\tau_w)$ системы, обеспечивающей вдув, т.е. $(m;\tau_w) \to (q,f;Q,F,N)$. *Оптимальное* управление $m(x)$ (среди непрерывных функций) было построено [3], как решение экстремальной задачи: $Q(m) \to \inf_m$ при $N(m) \le N_{max}$.

2. Модифицируем **обратные** по вдуву задачи (ОЗ) [4]. **Зададим:** 1) сетку *управления* X_1: $x_0^\wedge = 0 < \ldots < x_{n_1}^\wedge = 1$; 2) сетку *наблюдения* X_2: $x_0^\vee = 0 < \ldots < x_{n_2}^\vee = 1$; 3) непрерывно-дифференцируемое управление $\tau_w(x)$; 4) ограничения $I_{j,k} = [b_{j,k}; t_{j,k}]$, $j = 1,\ldots,n_1$, $k = 0,\ldots,\nu_1$, $\nu_1 \ge 0$; 5) «контрольные» значения $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0,\ldots,n_2}$. Требуется **найти** непрерывное управление $m^\sim$, задаваемое элементами $m^\sim(x) = m_j^\sim(x)$ для $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, $j = 1,\ldots,n_1$, удовлетворяющими условиям $(m^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}$, $k = 0,\ldots,\nu_1$, такое, что вычисленные на X_2 значения $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0,\ldots,n_2}$, где $q_j^\sim = q(x_j^\vee; m^\sim; \tau_w)$, должны быть близкими к $q^\vee$, т.е. $q^\vee \to m^\sim$, $(m^\sim;\tau_w) \to (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim; Q^\sim, F^\sim, N^\sim)$.

Замечания. 1) На $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ элемент $m_j^\sim$ можно задавать полиномом степени $\mu \ge \nu_1 + 1$. 2) Вместо $q^\vee$ можно задать значения $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0,\ldots,n_2}$. Тогда $f^\vee \to m^\sim$, $(m^\sim;\tau_w) \to (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee; Q^\sim, F^\sim, N^\sim)$. 3) Аналогично формулируются ОЗ по ТФ: $q^\vee \to \tau_w^\sim$ или $f^\vee \to \tau_w^\sim$.

Для $\nu_2 \ge 0$ на интервалах $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, $j = 1,\ldots,n_1$ введём дополнительные сетки (при $\nu_2 = 0$ – они пусты) $X_{1,j}^+ = (x_{j,k}^+)_{k=1,\ldots,\nu_2}$: $x_{j-1}^\wedge < x_{j,k}^+ < x_j^\wedge$. Для $X_2 = X_1 \cup X_{1,1}^+ \cup \ldots \cup X_{1,n_1}^+$ в зависимости от соотношения между ν_1 и ν_2 задача будет *недо-*, *пере-* или *однозначно определённой*, что влечёт разные возможности для определения степени близости $q^\sim$ к $q^\vee$ (или $f^\sim$ к $f^\vee$).

3. Пусть фиксированы *неизменяемые параметры*: высота полёта $H \in [10;30]$ [км], число Маха $M_\infty \in [10;40]$, радиус затупления тела $R \in [0,1;1]$ [м], а диапазоны *управляющих параметров* в точке торможения (ТТ) $x = 0$ ограничены: $m_0 = m(0) \in I = [0;1]$, $\tau_0 = \tau_w(0) \in [0,1;0,9]$, $s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5\cdot 10^4]$ [Тл/Ом · м] (обозначения по [2] и [5]). Зафиксируем два из трёх параметров m_0, τ_0, s_0. Тогда для цилиндрических и сферических поверхностей зависимость от оставшегося параметра у функций q, $\overline{f}$ в ТТ описана в следующих утверждениях.

Утверждение 1. *Функции* $q(0;m_0;\tau_0;s_0)$, $\overline{f}(0;m_0;\tau_0;s_0)$ *строго монотонно убывают по* m_0.

Утверждение 2. *Функции* $q(0;m_0;\tau_0;s_0)$, $\overline{f}(0;m_0;\tau_0;s_0)$ *строго монотонно убывают по* τ_0.

Утверждение 3. *Функции* $q(0;m_0;\tau_0;s_0)$, $\overline{f}(0;m_0;\tau_0;s_0)$ *строго монотонно убывают по* s_0.

Работа выполнялась в рамках проектной части государственного задания №13.262.201.2014К.

Список литературы

[1] Гараев К. Г., Овчинников В. А., Бильченко Н. Г. *Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения*: Монография.– Казань: Изд-во КГТУ, 2003.– 123с.

[2] Бильченко Н. Г. *Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа*, Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии.– 2016.– № 1.– С. 5–14.

[3] Бильченко Н. Г. *Об оптимальном управлении тепломассообменом в пограничном слое на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов*, Междунар. конф. «XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа–симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» КРОМШ–2015: сборник тезисов. Батилиман (Ласпи), 17 – 29 сентября 2015 г.– Симферополь: ООО Форма, 2015.– С. 70–71.

[4] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. *Об одной обратной задаче тепломассообмена*, «Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале Дифференциальные уравнения и процессы управления.– 2016.– № 2.– Ч. 2.– С. 50–56. – URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf (дата обращения: 12.07.2016).

[5] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. *Об однозначной зависимости параметров пограничного слоя от управляющих воздействий в точке торможения гиперзвукового потока*, Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конф.: ВВМШ «Понтрягинские чтения – XXVII», 3 мая – 9 мая 2016 г.– Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016.– С. 44–46.

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СОСУДА С ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Кумакшев С.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Россия, Москва)

E-mail: kumak@ipmnet.ru

В линейном приближении исследуется задача о малых колебаниях тяжелой жидкости со свободной поверхностью в подвижном сосуде (например, танкеры, цистерны, топливные баки, технологические объекты). Разработан новый метод конструктивного решения задачи о корректном приведении глубокого прямоугольного сосуда (контейнера) с относительно покоящейся тяжелой жидкостью в состояние поступательного движения с требуемой скоростью. Во избежание резонансных эффектов с целью возбуждения внутренних волн предлагается и реализуется алгоритм квазистационарного существенного изменения скорости сосуда с жидкостью как целого. В конце процесса заданного изменения скорости оцениваются возбужденные внутренние колебания жидкости в зависимости от величины, длительности и степени гладкости по В.А. Стеклову управляющего воздействия (ускорения).

1. Для описания состояния несжимаемой однородной жидкости в горизонтально перемещаемом сосуде вводится потенциал $\varphi = \varphi(t, x, y)$ относительных скоростей, где t — время, x, y — естественные декартовые координаты в вертикальной плоскости, связанные с нижней ($y = 0$, дном) и левой ($x = 0$, вертикальной) стенкой; торцевые эффекты не учитываются.

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = 0, \quad 0 < x < l, \quad \varphi(0, x, y) = \text{const}; \quad \varphi'_x \equiv 0, \quad x = 0, l; \quad \varphi'_y \equiv 0, \quad y = 0;\\ (\ddot{\varphi} + g\varphi'_y)|_{y=h} = x\gamma(t), \quad \gamma = \ddot{c}, \quad t \geqslant 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь Δ — двумерный оператор Лапласа, g — ускорение сил тяжести.

Выражение первого приближения для формы поверхности жидкости имеет вид

$$\eta(t, x) = h - \tfrac{\dot{c}(t)}{g}x + \tfrac{1}{g}\dot{\varphi}(t, x, h), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \quad \dot{\eta} = v_y = -\varphi'_y(t, x, h), \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty. \tag{2}$$

Из выражений (2) следует соответствующее граничное условие (1).

2. Для приближенного решения используется модальный подход. Потенциал скоростей:

$$\varphi(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(t) \cos \pi n \frac{x}{l} \left(\operatorname{ch} \pi n \frac{y}{l} \Big/ \operatorname{ch} \pi n \frac{h}{l} \right), \tag{3}$$

где Θ_n — коэффициенты Фурье, подлежащие определению из условий задачи управления (1) с конечными условиями $c(T) = c^*$, $w(T) = 0$, $\varphi(T, x, y) = \text{const}$. Представление (3) приводит к счетной системе задач Коши для Θ_n

$$\begin{gathered}\ddot{\Theta}_n + \omega_n^2\Theta_n = \alpha_n\gamma,\ \alpha_0 = \tfrac{l}{2},\ \alpha_n = -\left(\tfrac{2}{\pi n}\right)^2 l \sin^2 \pi\tfrac{n}{2}; \quad \omega_0^2 = 0,\ \omega_n^2 = \pi n\tfrac{g}{l} \operatorname{th} \pi n\tfrac{h}{l},\ n \geq 1;\\ \Theta_0(0) = \varphi_0(0), \quad \dot{\Theta}_0(0) = \dot{\varphi}_0(0); \quad \Theta_n(0) = \dot{\Theta}_n(0) = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Требуется выбором финитной (достаточно гладкой) функции $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq T$, изменить на величину $\delta c = c^* - c^0$ скорость $c(t)$ сосуда. Режим управления должен приводить к исчезающе малым относительным колебаниям нечетных мод, $n = 2k - 1$, жидкости. Колебания четных мод $n = 2k$ в сосуде не возбуждаются посредством продольных (вдоль оси Ox) воздействий.

Представим решение счетной системы задач Коши (4) (учтем, что $w(0) = 0$)

$$\begin{gathered}\Theta_n(t) = \tfrac{\alpha_n}{\omega_n} \int_0^t s_n(t - \tau)\gamma(\tau)d\tau = \alpha_n \int_0^t c_n(t - \tau)w(\tau)d\tau,\\ s_n \equiv \sin \omega_n t, c_n(t) \equiv \cos \omega_n t, 0 \leq t \leq T; \quad \gamma(t) \equiv 0, w(t) \equiv 0, t \leq 0, t \geq T.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь величина интервала $T \gg T_1 = 2\pi/\omega_1$, где T_1 — период низшей моды $n = 1$.

Рассматриваются классы функций $\{\gamma(t)\}$, $\{\omega(t)\}$ такие, что $\int_0^T \gamma(t)dt = 0$, $\int_0^T (T - t)\gamma(t) = \int_0^T w(t)dt = c^* - c^0 = \delta c$. Потенциал относительных скоростей $\varphi(t, x, y)$ (3) должен быть достаточно гладкой функцией всех аргументов, обеспечивающим малость кинематических и силовых возмущений, вызванных волновыми движениями жидкости согласно (1), (2), (5). В качестве масштаба скорости выбирается абсолютное максимальное, по (t, x, y) значение величины $v = -\varphi_x \approx -\varphi_{1x}$ при заданных функциях $\gamma(t)$, $\omega(t)$ из рассматриваемого класса, либо величина $\hat{c}$, обусловленная допустимым значением $\hat{w}$, или мощностью, т.е. $\hat{c}\hat{w}$. Требуется на асимптотически большом интервале времени $T \gg T_1$ привести сосуд в состояние движения, как целого с требуемой вариацией скорости $\delta c \gg |v|$.

СМЕШАННЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ МОДУЛЬ ГЛАДКОСТИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ "УГЛОМ"

Руновский К.В., Омельченко Н.В.

Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в Севастополе,
Севастопольский государственный университет (Россия, Севастополь)

E-mail: k_runov@mail.ru, nvomelchenko@mail.ru

Пусть $\theta(\xi) = \theta_1(\xi_1)\dots\theta_d(\xi_d)$, где θ_j, $j = 1,\dots,d$ – 2π-периодическая непрерывная функция, ряд Фурье которой абсолютно сходится, и $\theta_j(0) = 0$. Введенный в [1] смешанный θ-модуль гладкости 2π-периодической функции $f(x_1,\dots,x_d)$ определяется формулой

$$\Omega_\theta(f,\delta)_p = \sup_{\substack{0\,\le\, h_j\,\le\,\delta_j,\\ j=1,\dots,d}} \Big\| \sum_{\nu\,\in\,\mathbb{Z}^d} \theta^\wedge(\nu)\, f(x+\nu\cdot h) \Big\|_p\,,\ \delta_j \ge 0\,,$$

где $\nu\cdot h = (\nu_1 h_1,\dots,\nu_d h_d)$, $\theta^\wedge(\nu)$, $\nu\in\mathbb{Z}^d$, – коэффициенты Фурье функции θ, а $\|\cdot\|_p$ – стандартная норма в пространстве L_p, $1 \le p < +\infty$, 2π-периодических измеримых по Лебегу и интегрируемых в p-ой степени функций d переменных (норма Чебышева в пространстве C периодических непрерывных функций при $p = +\infty$). Эта конструкция является, с одной стороны, многомерным аналогом θ-модуля гладкости функции одной переменной [2], а с другой, – естественным обобщением классических смешанных модулей и смешанных модулей гладкости положительного порядка [3], которые используются для изучения введенного в [4] понятия приближения „углом“

$$Y_\sigma(f)_p \;=\; \inf_{g_j\,,\,j=1,\dots,d} \Big\| f - \sum_{j=1}^{d} g_j \Big\|_p\,,\ \sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_d)\,,\ \sigma_j \ge 0\,,$$

где g_j, $j = 1,\dots,d$, – произвольная функция из L_p, являющаяся тригонометрическим полиномом порядка не выше $[\sigma_j]$ по переменной x_j.

Доказано, что при некоторых достаточно общих условиях на генератор модуля θ для $1 \le p \le +\infty$ справедливы *прямая оценка* ($\sigma^{-1} = (\sigma_1^{-1},\dots,\sigma_d^{-1})$, $\lambda > 0$)

$$Y_\sigma(f)_p \;\le\; c(p,\theta,\lambda)\,\Omega_\theta(f,\lambda\cdot(\sigma+1)^{-1})_p\,,\ f\in L_p\,,\ \sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_d)\,,\ \sigma_j \ge 0\,,$$

и *обратная оценка* ($t = (t_1,\dots,t_d)$)

$$\Omega_\theta(f,\delta)_p \;\le\; c(p,\theta)\int_0^\pi\dots\int_0^\pi \prod_{j=1}^{d} t_j^{-1}\big|\,(t_j^2\theta_j(t_j))''\,\big|\,Y_{t\cdot\delta^{-1}}(f)_p\,dt_1\dots dt_d\,,\ \delta = (\delta_1,\dots,\delta_d)\,,\ \delta_j \ge 0\,.$$

Все известные ранее прямые и обратные теоремы о приближении „углом“, доказанные для классических смешанных модулей гладкости и смешанных модулей гладкости положительного порядка (см. [3], [4]), суть простые частные случаи полученных общих результатов. Приведенная здесь обратная оценка является новой даже в одномерном случае. Обратная оценка, полученная в [1], была доказана лишь при условии, что функция θ_j, $j = 1,\dots,d$, в некотором смысле близка к степенной функции в окрестности нуля. Таким образом, это условие оказалось излишним.

Полученные результаты имеют много следствий. В частности, с их помощью могут быть даны структурные описания классов функций, имеющих приближение „углом“ того или иного порядка, который в отличие от многих предыдущих исследований не обязательно является степенным. Так, условие $Y_\sigma(f)_p = O(\eta(\sigma))$, где $\eta(t) \;\le\; c\,\eta(2t)$, $t = (t_1,\dots,t_d)$, $t_j \ge 0$, $\lim\limits_{|\,t\,|\to+\infty}\eta(t) = 0$, эквивалентно условию $\widetilde{\Omega}(f,\delta)_p = O(\eta(\delta^{-1}))$, где $\widetilde{\Omega}(f,\delta)_p$ порождается функцией $\theta(\xi) = \theta_1(\xi_1)\dots\theta_d(\xi_d)$, $\theta_j(\xi) = 0$ при $|\xi| \le \pi/2$, $\theta_j(\xi) = \pi(\pi/2-\xi)$ при $\pi/2 < |\xi| \le \pi$.

Список литературы

[1] Руновский К.В., Омельченко Н.В., *Смешанный обобщенный модуль гладкости и приближение „углом“ из тригонометрических полиномов*, Математические заметки 100:3(2016), 421-432.

[2] Руновский К.В., *Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости*, Математические заметки 95:6(2014), 899-910.

[3] Потапов М.К., Симонов Б.В., *Свойства смешанного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике*, Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Матем., мех. 6(2014), 31-40.

[4] Потапов М.К., *Приближение „углом“ и теоремы вложения*, Math. Balkanica 2(1972), 183-198.

СХОДИМОСТЬ ДВУХЭТАПНОГО ПРОКСИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Семёнов В.В.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко (Украина, Киев)

E-mail: semenov.volodya@gmail.com

В докладе будет сделан обзор результатов недавних работ [1-5], в которых предложены новые методы решения задач о равновесии вида:

$$\text{найти } x \in C: \ F(x,y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где C — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E, $F : C \times C \to \mathbb{R}$ — бифункция. Также будут рассмотрены варианты методов для вариационных неравенств. Основное внимание будет уделено доказательству сходимости и формулировке новых вопросов.

Опишем вкратце один из результатов. Рассмотрим бифункцию F, удовлетворяющую условию: для всех $x \in C$ функция $F(x,\cdot)$ выпукла и замкнута на множестве C. Для приближенного решения задачи о равновесии предлагаем следующий итерационный алгоритм:

$$\begin{cases} x_1, \ \ y_1 \in C, \\ x_{n+1} = argmin_{y \in C} \left\{ F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D\left(y, x_n\right) \right\}, \\ y_{n+1} = argmin_{y \in C} \left\{ F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D\left(y, x_{n+1}\right) \right\}, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, D — расстояние Брэгмана на множестве C, построенное по сильно выпуклой (с константой $\sigma > 0$), непрерывной и дифференцируемой функции $g : C \to \mathbb{R}$, т.е.

$$D(a,b) = g(a) - g(b) - (\nabla g(b), a-b) \quad \forall a, b \in C.$$

Предположим, что множество решений задачи о равновесии S не пусто, а бифункция F псевдомонотонна на C и удовлетворяет условию: для всех x, y, $z \in C$ имеет место

$$F(x,y) \leq F(x,z) + F(z,y) + a\left\|x-z\right\|^2 + b\left\|z-y\right\|^2,$$

где a, b — положительные константы. Тогда для любого $z \in S$ имеет место неравенство:

$$D(z, x_{n+1}) \leq D(z, x_n) - \left(1 - \frac{2\lambda b}{\sigma}\right) D(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \frac{4\lambda a}{\sigma}\right) D(y_n, x_n) + \frac{4\lambda a}{\sigma} D(x_n, y_{n-1}).$$

С помощью этого неравенства доказываем сходимость описанного алгоритма с $\lambda \in \left(0, \frac{\sigma}{2(2a+b)}\right)$.

Для вариационного неравенства:

$$\text{найти } x \in \Delta_d: \ (Ax, y-x) \geq 0 \quad \forall y \in \Delta_d,$$

где $\Delta_d = \left\{x \in \mathbb{R}^d: \ x_i \geq 0, \ \sum_i x_i = 1\right\}$ — симплекс, $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, используя данный подход можно получить любопытный алгоритм [5]:

$$\begin{cases} x_i^{n+1} = \frac{x_i^n \exp(-\lambda (Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^d x_j^n \exp(-\lambda (Ay_n)_j)}, \quad i = 1, ..., d, \\ y_i^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} \exp(-\lambda (Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^d x_j^{n+1} \exp(-\lambda (Ay_n)_j)}, \quad i = 1, ..., d, \end{cases}$$

где $(Ay_n)_i \in \mathbb{R}$ — i-я координата вектора $Ay_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$.

Исследования выполнены при поддержке МОН Украины (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0116U004777).

Список литературы

[1] Malitsky Yu.V., Semenov V.V., *An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities*, Cybernetics and Systems Analysis, Volume 50 (2014), Issue 2, p. 271–277.

[2] Ведель Я.И., Семёнов В.В., *Новый двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задачи о равновесии*, Журнал обчисл. та прикл. матем., 2015, № 1 (118), с. 15–23.

[3] Ведель Я.И., Семёнов В.В., *Двухэтапный проксимальный алгоритм для задачи о равновесии*, Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016», Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016, 464 с., (с. 110-113).

[4] Lyashko S.I., Semenov V.V., *A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming*, In: Optimization and Applications in Control and Data Sciences, Springer Optimization and Its Applications 115, Springer Int. Publ., 2016.

[5] Семёнов В.В., *Вариант метода зеркального спуска для вариационных неравенств*, Кибернетика и системный анализ, 2017, (подана).

СВОЙСТВА ОСОБОГО МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ

Царьков И.Г.

МГУ (Россия, Москва)

E-mail: tsar@mech.math.msu.su

Точка $x \in X \setminus M$ называется регулярной для замкнутого множества $M \subset X$, если все точки некоторой окрестности $O(x)$ являются точками единственности (т.е. для них существует единственная ближайшая в M). Точки, не являющиеся регулярными или принадлежащие замыканию $\operatorname{int} M$, будем называть особыми.

Гладким путем будем называть такое отображение $r : I \to X$ ($I \subset \mathbb{R}$ – промежуток), что $\|\dot r\| \neq 0$ на I. Если некоторый конец a промежутка I принадлежит этому промежутку, то точку $A = r(a)$ назовем концом пути r. Будем говорить, что гладкий путь $r : I \to X$ принадлежит классу H_0^α (является H_0^α -путем) при $\alpha \in (1, 2]$, если отображение $\dot r$ гёльдерово с показателем $\alpha - 1$ на внутренности промежутка I (т.е. на $\dot I = \operatorname{int} I$). Будем говорить, что путь r в конце $A = r(a)$ имеет гладкость C^1 (соответственно, H^α), если $r \in C^1(a)$ ($\dot r$ – гёльдерово с показателем $\alpha - 1$ в точке a). Далее будем рассматривать пути только трех типов. К первому типу отнесем простые пути $r : (a, b) \to X$, для которых $r(t) \to \infty$ при $t \to a(b)$. Такие пути будем называть неограниченными. Ко второму типу отнесем простые полуограниченные пути $r : [a, b) \to X$, для которых $r(t) \to \infty$ при $t \to (b)$. К третьему типу отнесем простые ограниченные пути $r : [a, b] \to X$.

Пусть γ – гладкая поверхность класса C^2 со следом M в конечномерном пространстве X. И пусть L – касательная плоскость к γ в точке $y_0 \in M$. Пусть для некоторого единичного вектора $\ell \nparallel L$ шар $B(y_0 + t\ell, t)$ ($t \geqslant 0$) пространства X касается плоскости L. Величину $r \in \overline{\mathbb{R}}$, равную супремуму по всем числам $t \geqslant 0$, для которых точка y_0 является локальным минимумом функции-расстояния для точки $x_t = y_0 + t\ell$, назовем радиусом кривизны поверхности γ в точке y_0 по направлению вектора ℓ. При этом точку $x_r \in \mathbb{X}$ назовем центром кривизны (максимальной кривизны) поверхности γ в точке y_0 по направлению вектора ℓ. Нетрудно видеть, что в плоском случае это означает совпадение евклидовых кривизн γ и шара в точке y_0. В геометрической оптике множество всех центров кривизны поверхности γ называют каустикой. В случае плоской кривой каустика – это эволюта. В случае пространств с модулем выпуклости 2-го порядка под **каустикой** будем понимать замыкание множества всех центров кривизны поверхности γ.

Особую точку x множества M в двумерном пространстве X назовем вершиной, если она принадлежит каустики. Узлом назовем особую точку x, не являющуюся вершиной и для которой количество ближайших больше двух. При этом число компонент связности множества ближайших элементов узла назовем его кратностью.

Теорема 1. *Пусть X – двумерное пространство с модулем выпуклости второго порядка и со сферой гладкости H^α ($\alpha \in (1, 2]$). Рассмотрим C^2-многообразие на плоскости X с замкнутым следом M. Тогда особое множество E для множества M является замкнутым множеством, не пересекающимся с M. При этом*

1. *Множество неизолированных вершин E образует нигде не плотное в E подмножество, а изолированных вершин не более, чем счетно, и для каждой из них множество ее ближайших точек в M образует сферу.*
2. *Множество узлов – не более, чем счетное множество, нигде не плотное в E.*
3. *Дополнение множества всех вершин и узлов до E представляет собой не более, чем счетное множество следов простых H_0^α-путей за вычетом концов. При этом для ограниченных и полуограниченных путей их концы являются либо вершинами, либо узлами. Если конец является вершиной, то в этой точке путь гладкости C^1, если конец является узлом, то в нем гладкость H^α. В каждой точке $T = r(t)$ ($t \in I$) каждого пути $r(\cdot)$ промежутки $[Y_1, T)$ и $(T, Y_2]$ не пересекаются с особым множеством, где Y_1 и Y_2 – ближайшие к T для M.*
4. *Из каждого узла исходят гладкие пути (у которых узел является концом), число которых равно кратности узла.*
5. *Если число локальных максимумов кривизны многообразия конечно, то число вершин, узлов и соединяющих их кривых, составляющих особое множество, конечно.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00295-а.

ABOUT THE ERROR OF APPROXIMATION OF CONVEX COMPACTA IN $\mathbb{R}^n$

Maxim Balashov

Moscow Institute of Physics and Technology (Russia, Moscow)

E-mail: balashov73@mail.ru

We denote by $f'(p)$ an arbitrary subgradient of the function $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ at $p\in\mathbb{R}^n$, i.e.

$$f'(p)\in\partial f(p)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(q)\geq f(p)+(x,q-p),\quad \forall q\in\mathbb{R}^n\}.$$

The *Hausdorff distance* between two subsets $A,B\subset\mathbb{R}^n$ is defined as follows $h(A,B)=$

$$=\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\quad \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\right\}=\inf\{r>0 \mid A\subset B+B_r(0),\ B\subset A+B_r(0)\}.$$

For any subadditive function f define the sets

$$O_f=\{p\in\partial B_1(0) \mid f(p)=\mathrm{co}f(p)\},\quad C_f=\partial B_1(0)\backslash O_f. \tag{1}$$

Let $\delta>0$ and $w:[0,\delta]\to\mathbb{R}$, where the function $w(t)\geq 0$ is nondecreasing for all $t\in[0,\delta]$ and $\lim\limits_{t\to+0}w(t)=w(0)=0$. We shall say that a subadditive function $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ is *uniformly continuously subdifferentiable (ucs)* with modulus w on the set O_f (1) if for any $p\in O_f$, for any $f'(p)\in\partial f(p)$ and for any $q\in B_\delta(p)\cap\partial B_1(0)$ we have

$$f(q)-f(p)-(f'(p),q-p)\leq w(\|q-p\|).$$

Let $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ be a subadditive function and let $\mathrm{co}f(p)=\max\limits_{a\in A}(p,a)$ for some convex compact subset $A\subset\mathbb{R}^n$. Note that

$$A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (p,x)\leq f(p),\quad \forall p:\ \|p\|=1\}.$$

Put

$$\tilde{A}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (p,x)\leq f(p),\quad \forall p\in\mathbb{G}\},$$

where $\mathbb{G}$ is a grid on the unit sphere with the step Δ.

Theorem 1. *Let $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ be a subadditive function which is ucs with modulus w on the set O_f and there exist constants $R\geq r>0$ with*

$$r\|p\|\leq f(p)\leq R\|p\|,\quad \forall p\in\mathbb{R}^n.$$

Let $\mathbb{G}$ be a grid with step $\Delta\in(0,\frac{1}{2}\min\{\delta,1\})$ (here δ is from definition of ucs). Then

$$h\left(A,\tilde{A}\right)\leq\frac{R}{r}\frac{w(\Delta)}{1-\frac{\Delta^2}{2}}.$$

If the function f is convex, then

$$h\left(A,\tilde{A}\right)\leq\frac{w(\Delta)}{1-\frac{\Delta^2}{2}}.$$

Let f be a convex subadditive function and the function w is the best possible (in certain sense) in the definition of ucs. Define

$$\varepsilon(\Delta)=\sup_{\mathbb{G}}h\left(\tilde{A},A\right),$$

where $\mathbb{G}$ is a grid on the unit sphere with the step Δ. Then

$$\varepsilon(\Delta)\geq\frac{1}{4}\,w\left(\frac{\Delta}{4}\right)$$

for small $\Delta>0$.

References

[1] Balashov M. V., *About polyhedral approximations in n-dimensional space*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, Vol. 10 (to be appeared).

Секция 6. Теория игр и экономическое поведение

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КОНЕЧНОЙ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ С УЧЕТОМ РИСКОВ И СОЖАЛЕНИЙ

Бардин А.Е., Житенева Ю.Н., Макаркина Т.В.

Государственный гуманитарно-технологический университет (Россия, г. Орехово-Зуево)

E-mail: intch2006@rambler.ru, ulya_zhiteneva@mail.ru, tatmak147@yandex.ru

Рассматривается игровая модель задачи принятия решений при неопределенности. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество стратегий лица, принимающего решения (ЛПР). Если ЛПР выбрал стратегию $x_i \in X$, то в результате последующей реализации независимых факторов, его выигрыш определяется числом $y_i \in Y_i = [a_i, b_i]$. Далее перейдем к смешанному расширению игры с природой. Зададим смешанную стратегию ЛПР как n-мерный вектор $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, где величина p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ – вероятность, с которой ЛПР выбирает стратегию $x_i \in X$. Формализуем игру с природой в виде

$$\Gamma = \langle P, Y, f(p, y) \rangle,$$

где множество смешанных стратегий ЛПР

$$P = \Big\{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \Big|\ p_i \geq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Big\},$$

совокупность неопределенностей

$$Y = \Big\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Big|\ y_i \in [a_i, b_i],\ i \in \{1, 2, \ldots, n\} \Big\}.$$

Значение функции выигрыша ЛПР в смешанной ситуации $(p, y) \in P \times Y$ определим числом $f(p, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i y_i$. Каждая допустимая стратегия $p \in P$ оценивается по двум критериям:

$$\begin{cases} R_V(p) = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{y \in Y} f(p, y) - \min\limits_{y \in Y} f(p, y), \\ R_S(p) = \max\limits_{y \in Y} \Phi(p, y) - \min\limits_{p \in P} \max\limits_{y \in Y} \Phi(p, y), \end{cases}$$

где функция

$$\Phi(p, y) = \max_{p \in P} f(p, y) - f(p, y).$$

Здесь число $R_V(p)$ есть значение риска, а $R_S(p)$ – сожаление ЛПР при выборе данной стратегии.

От игры Γ перейдем к двухкритериальной задаче

$$\langle P, \{f_1(p) = -R_V(p), f_2(p) = -R_S(p)\} \rangle,$$

для которой оптимальное решение формализуем согласно методу точки утопии. Именно, решаем задачу

$$p \in P,\ G(p) \to \min,$$

где $G(p) = f_1^2(p) + f_2^2(p)$. Найденное решение назовем *U-оптимальным* для исходной задачи.

Предложение 1. *Для игры Γ существует U-оптимальное решение, а также эффективный алгоритм его нахождения.*

Экономическая интерпретация игры с природой Γ рассмотрена в работе [1].

Список литературы

[1] Бардин А.Е., Житенева Ю.Н., Макаркина Т.В. *Построение оптимального портфеля в условиях неопределенности с учетом рисков и сожалений*// Таврический Вестник Информатики и Математики. – Симферополь. 2015. №2, с. 33-45.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЗОЛОТОГО ПРАВИЛА

Жуковский В.И.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Формулировка Золотого правила нравственности (ЗПН): «Поступай по отношению к другому так, как ты хочешь, чтобы он поступил по отношению к тебе». Оно является одним из самых древних, распространенных и специфичных нравственных требований и акцентируется в христианстве, исламе, иудаизме, буддизме и конфуцианстве. В России теоретические исследования ЗПН возглавляет академик А.А. Гусейнов [1]. ЗНП естественно использовать при тушении, уравновешивании конфликтов, а его «альтруистический характер» при этом заведомо исключает войны, кровопролития, вооруженные столкновения.

Мы предлагаем в качестве математической модели ЗПН использовать концепцию равновесия по Бержу (BE — Berge equilibrium). BE появилось в России в 1995 году при критическом обсуждении книги Клода Бержа [4], отсюда и название «Равновесие по Бержу». В 1995 году К.С. Вайсман (тогда аспирант Жуковского В.И.) в Санкт-Петербургском университете на факультете ПМиПУ защитил кандидатскую диссертацию «Равновесие по Брежу». В дальнейшем это понятие получило широкое распространение у наших иностранных коллег. Количество публикаций монотонно растет из года в год [5]. Предлагаемая теория BE делиться на статический и динамический варианты.

Статический вариант. Для бескоалиционной игры N лиц в нормальной форме

$$\Gamma =< \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} >,$$

где $\mathbb{N} = \{1,\dots,N\}$; чистые стратегии i-ого игрока $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$; ситуация $x = (x_1,\dots,x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$; $f_i(x)$ — функция выигрыша i-ого игрока; $(x||z_i) = (x_1,\dots,x_{i-1},z_i,x_{i+1},\dots,x_N) \in X$.

Ситуация $x^B \in X$ *равновесна по Бержу* в Γ, если

$$f_i(x||x_i^B) \le f_i(x^B) \quad \forall x \in X, i \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Так как X^B — множество BE внутренне не устойчиво (могут $\exists\ x^{(1)}$, $x^{(2)} \in X^B : f_i(x^{(1)}) > f_i(x^{(2)})$ $(\forall i \in \mathbb{N})$), то формализуем SBE — слабо эффективное BE, добавляя к требованию (1) слабую эффективность (максимальность по Слейтеру) по отношению к остальным ситуациям из X^B, множества ситуаций, из X^B, «нагруженных» дополнительно требованием слабой эффективности, обозначим X^{SB}. Свойства X^{SB}:

1) $X^{SB} \in compX$ (хотя может быть $X^{SB} = \emptyset$), если $X_i \in comp\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$ [1];

2) достаточные условия: $\exists x^{SB}$ сводится к $\exists$ седловой точки специальной гермейеровской свертки функции выигрыша [2];

3) SBE в Γ существует в смешанных стратегиях, если $X_i \in comp\mathbb{R}^{n_i}$, $f_i(\cdot) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$ (аналог теоремы Гликсберга для равновесия по Нэшу) [2];

4) аналогичные результаты получены в [6] для игры Γ при учете неопределенностей $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, т.е. для

$$\Gamma_U =< \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbb{N}} >;$$

5) в моделях олигополии Курно и Бертрана выделены случаи, когда применение BE доставляет всем игрокам большие выигрыши, чем NE [1].

Динамический вариант. Основой исследования здесь явились три фактора:

a) модернизация математической формализации по Н.Н. Красовскому дифференциальной позиционной игры в связи с контрпримерами А.И. Субботина и А.Ф. Кононенко [7],

b) предложенный Н.Н. Красовским метод «управления с поводырем»,

c) гермейеровская свертка функций выигрыша игроков.

Результаты: 1^0) выделен класс дифференциальных игр с «разделенной динамикой», в котором существуют BE [8];

2^0) для ряда линейно-квадратичных ДПИ построены коэффициентные условия $\exists$ BE;

3^0) для многошаговых моделей дуополии Курно и Бертрана с помощью модификации метода динамического программирования найдены BE.

В настоящее время организуется коллектив из представителей России, Франции, Украины и Алжира для совместных теоретических исследований BE.

Список литературы

[1] Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., *Математические основы Золотого правила нравственности: Теория нового альтруистического уравновешивания конфликтов в противоположность «эгоистическому» равновесию по Нэшу.*, М.: URSS, (2016). (Relato Refero).

[2] Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., *Математические основы Золотого правила нравственности. I. Статический вариант,* Математическая теория игр и приложения, 7, No. 3 (2015), 16-47 .

[3] Жуковский В.И., Смирнова Л.В., Горбатов А.С., *Математические основы Золотого правила нравственности. II. Динамический вариант,* Математическая теория игр и приложения, 8, No. 1 (2016), 27-62.

[4] Berge C., *Théorie générale des jeux a n-personnes*, Paris: Gauthier Villars, (1957).

[5] Larbani M., Zhukovskiy V.I., *Berge-Equilibrium in Normal Form Games: a literature review,* International Game theory review (in Press, 43p).

[6] Zhukovskiy V.I., Chikrii A.A., Soldatova N.G., *Existence of Berge Equilibrium in Conflicts under Uncertainty,* Automation and Remote Control, 77, No. 4(2016), 607–622 .

[7] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., *The Vector-Valued Maximum*, N.Y. etc.: Academic Press, (1994).

[8] Zhukovskiy V.I., Topchishvili A.L., *Mathematical Model of Golden Rule in the Form Differential Positional Game of many Persons,* Model Assisted Statistics and Application, 17, (in Press, 30p).

ИСХОД И РИСК В МНОГОШАГОВОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Жуковский В.И., Высокос М.И.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва),
Государственный гуманитарно-технологический университет (Россия, Орехово-Зуево)

E-mail: zhkvlad@yandex.ru, mvysokos@mail.ru

Рассматриваем однокритериальную многошаговую позиционную задачу при неопределенности $\Gamma_Z = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{U}_Z, \mathbf{Z}, J(U_Z, Z, x_0)\rangle$, где изменение $\mathbf{\Sigma}$ описывается уравнением

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k, x(k), z(k, x(k))), z(k, x(k))),\ x(0) = x_0,\ (k = 0, 1, ..., K-1) \qquad (1)$$

(момент окончания управления) постоянную $K > 0$ фиксируем; $n-$вектор (вектор состояния) в момент времени k есть $x(k) \in \mathbb{R}^n$, пара $(k, x(k))$ — позиция в момент k; $(0, x_0)$ — начальная позиция; $U_Z(k) \div u(k, x, z) \in \mathbb{R}^m$ — стратегия ЛПР в момент времени k; $U_Z(k)$ будем называть контрстратегией в момент времени k; множество контрстратегий в момент времени k — $\mathbf{U}_Z(k)$. Стратегией ЛПР в Γ_Z является набор $U_Z = (U_Z(0), U_Z(1), ..., U_Z(K-1)) \div \div (u(0, x, z), u(1, x, z), ..., u(K-1, x, z))$; множество контрстратегий U_Z обозначим $\mathbf{U}_Z$.

Задача Γ_Z относится к *минимаксным.* Здесь в момент $k = 0, ..., K-1$ применяем *чистую неопределенность* $Z(k) \div z(k, x) \in \mathbb{R}^S$, множество которых в момент k обозначим $\mathbf{Z}(k) = \{Z(k)\}$; неопределенность $Z = (Z(0), Z(1), ..., Z(K-1)) \div (z(0, x), z(1, x), ..., z(K-1, x))$, множество которых обозначим $\mathbf{Z} = \prod_{k=0}^{K-1} \mathbf{Z}(k)$. При формировании контрстратегии $U_Z(k)$ в момент k используем *иерархическую* процедуру. На k-м ходу неопределенность $Z(k) \div z(k, x)$ поступает к ЛПР. Оно на этой основе выбирает в момент времени k свою стратегию $U_z(k) \div u(k, x, z)$. Здесь проявляется *дискриминация неопределенности.* Критерий, оценивающий качество поведения ЛПР задается функционалом $J(U_Z, Z, x_0) = \Phi(x(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} F(k, x(k), u[k], z[k])$. Цель ЛПР состоит в выборе стратегии $U_Z^* \in \mathbf{U}_Z$, при которой этот функционал принимает как можно большее значение; при этом возможна реализация любой чистой неопределенности $Z \in \mathbf{Z}$.

Для построения функции риска находим $\max\limits_{U_Z \in \mathbf{U}_Z} J(U_Z, Z, x_0) = J(U_Z^*, Z, x_0) = J[Z, x_0]$ при любых $Z \in \mathbf{Z}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, затем

$$R(U, Z, x_0) = J[Z, x_0] - J(U, Z, x_0). \qquad (2)$$

Гарантии исхода и риска. При построении гарантий будем использовать *стратегические неопределенности* Z_U, а Γ_Z изменится на

$$\Gamma_U = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{U}, \mathbf{Z}_U, J(U, Z_U, x_0)\rangle. \qquad (3)$$

Здесь $\mathbf{\Sigma}$ также имеет вид (1), но вместо $\mathbf{U}_Z$ используем множество чистых позиционных стратегий в момент k вида $U(k) \div u(k,x)$, множество их есть $\mathbf{U}(k)$, а сама стратегия становится $U = (U(0),...,U(K-1)) \div (u(0,x),...,u(K-1,x))$; их множество обозначим $\mathbf{U}$. Стратегические неопределенности в момент k будут $Z_U(k) \div z(k,x,u)$. Они определяются в предположении *дискриминации* ЛПР, который на первом ходу передает для формирования неопределенности $Z_U(k)$ в момент k выбранную им стратегию $U(k) \div u(k,x)$. Сама стратегическая неопределенность Z для случая (3) имеет вид $Z_U = (Z_U(0),...,Z_U(k-1)) \div (z(0,x,u(0,x)),...,z(K-1,x,u(K-1,x)))$, их множество обозначим $\mathbf{Z}_U$. Строим гарантии исхода и риска для Γ_U из (3) и для

$$\bar{\Gamma}_U = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{U}, \mathbf{Z}_U, -R(U, Z_U, x_0)\rangle, \tag{4}$$

где $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}_U$ те же, что в (3), а "минус" критерий $R(U,Z_U,x_0)$ взят из (2).

Гарантии по исходу, с учетом (3), и по риску, с учетом (2) будут соответственно $J[U,x_0] = \min\limits_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} J(U,Z_U,x_0)$, $-R[U,x_0] = \min\limits_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} [-R(U,Z_U,x_0)]$.

Нами формализовано понятие *сильно гарантированного по исходу и риску максимального по Парето решения* (СГИРП) задачи Γ_U, предложены достаточные условия существования такого решения. В качестве примера рассмотрена линейно-квадратичная одношаговая задача при неопределенности.

РИСКИ И ИСХОДЫ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Жуковский В.И., Кириченко М.М., Болдырев М.В.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: zhkvlad@yandex.ru, moyomylo11@gmail.com, m_boldyrev@list.ru

Предполагается способ построения стратегии в многокритериальной задаче при неопределенности (МЗН), обеспечивающей одновременно Парето-максимальность гарантированных исходов и рисков. В качестве приложения рассмотрены два варианта задачи о диверсификации вклада по двум депозитам (рублевому и валютному).

В 1939 году румынский математик, эмигрировавший в 1938 году в Америку, Абрахам Вальд (1902 - 1950) ввел [1] принцип максимина (гарантированного результата), позволяющего находить гарантированный исход в однокритериальной задаче при неопределенности (ОЗН). Почти через 10 лет немецкий математик Ю. Ниханс в 1948 году и американский математик, экономист, статистик Леонард Сэвидж (1917 - 1971) в 1951 году предложили [2, 3] принцип минимаксного сожаления, позволяющий для ОЗН строить гарантированный риск, получивший в литературе название «риск по Сэвиджу» (позднее назван «критерием Ниханса-Сэвиджа»). Естественно возникает вопрос о построении стратегии, обеспечивающей одновременно возможно больший исход при возможно меньшем риске.

Если в ОЗН одновременно учитывать исходный критерий и «минус» функцию риска по Сэвиджу (в качестве второго критерия), то ОЗН переходит в двухкритериальную задачу при неопределенности. Настоящая работа как раз и посвящена математическому обоснованию способа построения стратегии в МЗН, «стреляющей» одновременно по двум целям: увеличению гарантий всех исходов и при этом уменьшению сопровождающих рисков.

В публикациях по микроэкономике, например, в [4, с. 103] всех ЛПР делят на три категории. К первой относятся те, кто не любит рисковать *(рискофобы - греч. «phobos» означает «боязнь» чего-либо)*, вторые - любители риска *(рискофилы - греч. «phila» означает «любовь» к чему-либо)* и, наконец, третьи, кто решил одновременно учитывать как исходы, так и риски (рисконейтралы). В настоящем сообщении в двух случаях найдено решение задачи о диверсификации (за год) вклада по рублевому и валютному депозитам с точки зрения рисконейтрала.

Подобной задаче посвящена статья [5, p. 9], где для ОЗН получены результаты, пересекающиеся с полученными в этой работе.

Список литературы

[1] Wald A. *Contribution to the theory of statistical estimation testing hypothesis* // Annuals Math. Statist. 1939. Vol. 10. P. 299 -326.

[2] Nichans J. *Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen* // Schweizerische Zeitschrift fur Volkswirtschaft and Statistic. 1948. Vol. 84, № 5. P. 433 - 456.
[3] Sawage L. J. *The theory of statistical decision* // Journal of the American Statictical Association. 1951. Vol. 46, № 253. P. 55 - 67. DOI: 10.1080/016214459.1951.10500768.
[4] Черемных Ю. Н. *Микроэкономика. Продвинутый уровень.* М.: ИНФРА, 2008. 843 с.
[5] Zhukovskiy V. I., Molostvov V. S., Topchishvili A. L. *Problem of multicurrency deposit diversification - three possible approaches to risk accounting* // International Journal of Opera-tions and Quantitative Management. 2014. Vol. 20, № 1. P. 1 - 15.

СРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ ПО НЭШУ И БЕРЖУ В МОДЕЛИ ДУОПОЛИИ БЕРТРАНА

Жуковский В.И., Макаркина Т.В.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва),
Государственнй гуманитарно-технологический университет (Россия, Орехово-Зуево)

E-mail: zhkvlad@yandex.ru; tatmak147@yandex.ru

Пусть на рынке функционируют две фирмы, производящие один и тот же товар. Стратегией фирмы (игрока) пусть будет цена, назначаемая фирмой за свой товар. Таким образом, считаем, что каждая фирма объявляет свою цену $p_i = const \geq 0$ $(i = 1, 2)$. После объявления цен всеми фирмами складывается ситуация (набор цен) - вектор $\vec{p} = (p_1, p_2)$. Спрос на товар i-го игрока ($i \in \{1, 2\}$), возникающий на рынке, предлагаем линейным относительно объявленных цен, именно,

$$Q_1(\vec{p}) = q - l_1 p_1 + l_2 p_2, \quad Q_2(\vec{p}) = q - l_1 p_2 + l_2 p_1.$$

Здесь q - начальный спрос, коэффициент эластичности $l_1 = const > 0$ указывает насколько снижается спрос на предлагаемый товар при повышении цены на единицу. В свою очередь, коэффициент эластичности $l_2 = const > 0$ показывает насколько увеличивается спрос при увеличении на единицу цены товара-заменителя. Если обозначить себестоимость единицы товара через $c > 0$, то прибыль i-ой фирмы (далее называемой функцией выигрыша игрока $i \in \{1, 2\}$) будет

$$f_1(\vec{p}) = [q - l_1 p_1 + l_2 p_2](p_1 - c), \quad f_2(\vec{p}) = [q - l_1 p_2 + l_2 p_1](p_2 - c). \tag{1}$$

В результате математическую модель описанного выше взаимодействия между фирмами-продавцами можно представить упорядоченной тройкой

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{P_i = (c, \beta]\}_{i=1,2}, \{f_i(\vec{p}) \div (1)\}_{i=1,2} \rangle .$$

В этой бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме через $\{1, 2\}$ обозначено множество порядковых номеров игроков; $\beta = const > c$ - максимальная для игрока i цена, установленная рынком (и совестью продавцов!) порой независимо от желания игрока; стратегией игрока i является выбранная им цена $p_i = (c, \beta]$ в складывающейся на рынке "ценовой политики ситуации $\vec{p} = (p_1, p_2)$. Качество функционирования игрока i оценивается его выигрышем $f_i(\vec{p})$ - значением функции выигрыша $f_i(\vec{p})$ в создавшейся ситуации $\vec{p} = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$; полный вид $f_i(\vec{p})$ приведен выше в (1) (поэтому и использовано обозначение $f_i(\vec{p}) \div (1)$).

Отметим следующие особенности игры Γ:

во-первых, предполагается, что максимальная цена β и себестоимость c для обоих игроков одинаковы (что естественно для рынка одного товара);

во-вторых, правилами игры запрещена коалиция $\{1, 2\}$ (в этом проявляется, в частности, "бескоалиционный характер"игры);

в-третьих, цена $p_i > c$ $(i = 1, 2)$, ибо, в противном случае i-му игроку появляться на рынке вряд ли целесообразно.

Для игры Γ формализуются равновесия по Бержу и Нэшу.

Найдены соотношения между коэффициентами, при выполнении равновесие по Бержу доставляет игрокам большие выигрыши, чем равновесие по Нэшу.

Список литературы

[1] Гермейер Ю.Б.*Введение в исследование операций*, М.: Наука, 1971, 384 с.
[2] Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.*Уравновешивание конфликтов при неопределенности.I. Аналог седловой точки*Математическая теория игр и ее приложения Петрозаводск, 2013. Т. 5, №1. с. 27–44.
[3] Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности.II. Аналог максимина-Математическая теория игр и ее приложения Петрозаводск, 2013. Т. 5, №2. с. 3–45.

СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ЭФФЕКТИВНОСТИ И РИСКУ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АГЕНТОВ

Солдатова Н.Г.

Государственный гуманитарно-технологический университет (Россия, Орехово-Зуево)

E-mail: solnata@pochta.ru

Рассмотрим процесс принятия решений при взаимодействии агентов в условиях риска и неопределенности.

Один из агентов (Центр, обозначаемый в данной работе C) не учитывает риски и ориентируется только на эффективность. Другие два агента (имеющие порядковые номера 1, 2) стремятся к возможно большей своей эффективности и одновременно к возможно меньшему риску.

В статье [1] отмечалось, что для агента, стремящегося иметь возможно большую эффективность (исход), естественно применять принцип гарантированного результата (по Абрахаму Вальду [2]), а для агента, ориентированного на получение возможно меньшего риска, следует использовать принцип минимаксного сожаления (по Сэвиджу [3]). Учитывая эти подходы, формализуем понятие сильно гарантированного по эффективности и риску равновесия в задаче взаимодействия трех агентов.

Математическая модель исследуемого процесса взаимодействия агентов имеет вид

$$\langle \{C,1,2\}, \{U^X, X_1, X_2\}, Y, \{f_c(u,x), f_1(u,x,y), f_2(u,x,y)\}\rangle. \tag{1}$$

Здесь стратегия Центра $u \in U \subset \mathbb{R}^k$, U^X – множество k-вектор-функций $u(x)$, определенных на X со значениями в U; x_i — стратегия i-го агента $(i = 1,2)$, причем ситуация $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2 \subset \mathbb{R}^n$. Неопределенность $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$. В (1) каждый из агентов $j = C,1,2$ формирует свою стратегию соответственно u, x_1, x_2 с целью достичь возможно большей эффективности (значения своей оценочной функции $f_c(u,x), f_1(u,x,y), f_2(u,x,y)$), ориентируясь на реализацию любой неопределенности $y \in Y$. При этом предполагается, что о неопределенности y агентам известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют. Такая модель (1) возникает, например, на рынке сбыта, где продавцы функционируют с учетом импорта (или конкуренции), добиваясь как можно большей прибыли.

Численно будем оценивать риск i-го агента значением функции сожаления по Сэвиджу

$$\Phi_i(u,x,y) = \max_{z\in X} f_i(u,z,y) - f_i(u,x,y) \qquad (i = 1,2),$$

предложенной Леонардом Сэвиджем [3] для однокритериальной задачи при неопределенности.

Формализуем понятие сильно гарантированного равновесия в задаче (1).

Определение. *Сильно гарантированным по эффективности и риску равновесием* в задаче (1) назовем набор $(u(x), x^g, f_c^{(g)}, f_1^{(g)}, f_2^{(g)}, \Phi_1^{(g)}, \Phi_2^{(g)}) \in U^X \times X \times \mathbb{R}^5$ такой, что

1^o) существуют единственная непрерывная на X k-вектор-функция $u(x)$, для которой имеет место $\max_{u\in U} f_c(u,x) = f_c(u(x),x) = f_c[x]$ $\forall x \in X$, и четыре непрерывные на X скалярные функции $f_i[x]$, $\Phi_i[x]$, для которых $\min_{y\in Y} f_i(u(x),x,y) = f_i[x]$, $\max_{y\in Y} \Phi_i(u(x),x,y) = \Phi_i[x]$ $\forall x \in X$ $(i = 1,2)$;

2^o) ситуация x^e равновесна по Нэшу в модели $\langle\{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{\varphi_i(x) = f_i[x] - \Phi_i[x]\}_{i=1,2}\rangle$, (множество $\{x^e\}$ обозначаем X^e);

3^o) ситуация $x^g \in X^e$ максимальна по Слейтеру в двухкритериальной задаче $\langle X^e, \{\varphi_i[x]\}_{i=1,2}\rangle$;

4^o) гарантии Центра (по эффективности) и двух агентов (по эффективности и риску) соответственно будут $f_c^{(g)} = f_c(u(x^g), x^g)$, $f_i^{(g)} = f_i[x^g]$, $\Phi_i^{(g)} = \Phi_i[x^g]$ $(i = 1,2)$.

Установлено существование сильно гарантированого по эффективности и риску равновесия в модели (1), рассмотрены примеры.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В.И. Жуковского, а также К.С. Сорокина и А.Е. Бардина за обсуждение работы и замечания.

Список литературы

[1] Жуковский В.И., Чикрий А.А., Солдатова Н.Г., Ахрамеев П.К. *К задаче о диверсификации вклада* // Сборник научных трудов VIII Международной школы-симпозиума АМУР-2014. - Симферополь: ТНУ имени В.И. Вернадского, 2014. С. 134–142.

[2] Wald A. *Statistical Decision Functions.* - New York: Wiley, 1950.

[3] Savage L.Y. *The theory of statistical decision* // J. American Statistic Association. 1951. № 46. P. 55–67.

ИГРЫ С ПРИРОДОЙ И ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ОСОБОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗОНЫ

Фомина Т.П.

Липецкий государственный педагогический университет (Россия, Липецк)

E-mail: fomina_t_p@mail.ru

Липецкая область – первый субъект в России, начавший реализацию программы создания и развития особых экономических зон регионального уровня. Опыт показал, что это один из самых перспективных вариантов развития региональной экономики. В области развивается строительство четырех типов особых экономических зон регионального уровня: промышленно-производственный, технико-внедренческий, агропромышленный и туристско-рекреационнный. Для выбора типа экономической зоны можно использовать теорию игр.

Комиссия независимых экспертов провела исследование предложенных типов по шести факторам: затраты на строительство, расположенность, безопасность, технические характеристики, экологические характеристики, занятость. Оценки выставлялись по одиннадцатибалльной шкале. Эффективность использования каждого типа зоны с учетом баллов экспертов представлена матрицей:

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 11 & 4 & 4 \\ 8 & 5 & 3 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 9 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Рассматриваемая ситуация относится к ситуациям принятия решения в условиях неопределенности. Для выбора оптимального типа экономической зоны найдем значения критериев:

1) *Критерий максимакса.* Найдем максимумы по каждой строке матрицы и выберем из них максимальное значение, оно равно 11. Таким образом, данный критерий рекомендует вторую стратегию.

2) *Критерий Вальда.* Найдем минимальные значения по строкам и выберем из них максимальное значение, оно равно 3. Данный критерий рекомендует третью стратегию.

3) *Критерий Сэвиджа.* Построим матрицу рисков

$$R = \begin{pmatrix} 8-4 & 5-2 & 8-8 & 11-5 & 9-3 & 9-5 \\ 8-2 & 5-3 & 8-5 & 11-11 & 9-4 & 9-4 \\ 8-8 & 5-5 & 8-3 & 11-10 & 9-4 & 9-6 \\ 8-1 & 5-4 & 8-2 & 11-8 & 9-9 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 0 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 6 & 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Согласно критерию, ЛПР пытается выбрать действие, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е. $W = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$. Определим максимальные значения по строкам, имеем $\{6, 6, 5, 7\}$, наименьшее значение из них равно 5. Критерий рекомендует третью стратегию.

4) *Критерий Гурвица.* Вычислим $\max\limits_{1\le i\le m}[\alpha \min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} + (1\text{-}\alpha) \max\limits_{1\le j\le n} a_{ij}]$ при $\alpha = 0.6$: $\{0.6{\cdot}2{+}0.4{\cdot}8$, $0.6{\cdot}2{+}0.4{\cdot}11$, $0.6{\cdot}3{+}0.4{\cdot}10$, $0.6{\cdot}1{+}0.4{\cdot}9\}= \{4.4, 5.6, 5.8, 4.2\}$. Данный критерий рекомендует третью стратегию.

5) *Критерием Лапласа.* Будем считать, что вероятности состояний природы равны, т.е. $q_j = {}^1\!/_6$. Выбор решения определяется из условия $\max\limits_{1\le i\le m}(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij})$: $\frac{1}{6}(4{+}2{+}8{+}5{+}3{+}5){=}4.5$;

$\frac{1}{6}$(2+3+5+11+4+4)=4.83; $\frac{1}{6}$(8+5+3+10+4+6)=6; $\frac{1}{6}$(1+4+2+8+9+9)=5.5. Наибольшее значение достигается на третьей стратегии.

Рассматривая полученные решения, эксперты пришли к заключению о необходимости рекомендовать областной администрации строительство особой экономической зоны агропромышленного типа.

Однако следует заметить, что чаще всего оптимальная стратегия, определенная в результате применения теории игр к реальным конфликтным ситуациям, является теоретически оптимальной и в большинстве случаев реально удовлетворительной.

ОДНА ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ, СВЯЗАННАЯ С НЕКОТОРЫМИ ЗАДАЧАМИ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Шульман В.С.

Вологодский государственный университет (Россия, Вологда)

E-mail: shulman.victor80@gmail.com

Ряд важных результатов и задач теории операторов, и, в частности, так называемые $distance\ formulae$, см. [1], [2], носят минимаксный характер. В докладе рассматривается достаточно общая теорема о минимаксе, которая, как будет показано, может быть непосредственно использована в такого рода задачах. Чтобы ее сформулировать, условимся говорить, что непрерывная функция на компакте удовлетворяет условию глобальности максимумов, если любой ее локальный максимум является и глобальным. Таковы, например, вогнутые функции на выпуклых компактах.

Теорема 1. (О.Ю. Боренштейн, В.С. Шульман). *Пусть T — отрезок действительной оси, X — компактное топологическое пространство, и пусть непрерывная функция $f : T \times X \to \mathbb{R}$ выпукла по первой компоненте и удовлетворяет условию глобальности максимумов по второй. Тогда*

$$\min_{t\in T}\max_{x\in X} f(t,x) = \max_{x\in X}\min_{t\in T} f(t,x).$$

Список литературы

[1] Arveson W.B., *Interpolation problems in nest algebras*, J.Funct.Anal., V.20 (1975), 208-233.

[2] Логинов А.И., Шульман В.С., *Инвариантные подпространства операторных алгебр*, Итоги Науки и Техники, Матем. анализ, том 26, ВИНИТИ, Москва (1988), 65-145.

О ДОСТИЖИМОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ УКЛОНЕНИЯ В МИНИМАКСНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Югай Л.П.

Филиал Российского государственного университета нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина в г. Ташкенте (Узбекистан, Ташкент)

E-mail: yugailp@mail.ru

В постановке Л.С. Понтрягина—Е.Ф. Мищенко рассматривается задача уклонения от заданного терминального множества траекторий динамической системы, описываемой квазилинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с входящими в них управляющими параметрами. Управления выбираются двумя сторонами, имеющими противоположные цели. Такие задачи конфликтного управления называют еще дифференциальными играми уклонения (убегания). Процесс уклонения траекторий от терминального множества на бесконечном интервале времени зависит от конечного числа параметров, для которых вводится определение оптимальных параметров уклонения. Наиболее важным параметром уклонения является размерность специального подпространства, в котором отслеживается траектория уклонения. Рассматриваются минимаксные квазилинейные дифференциальные игры, для которых получены достаточные условия, разрешающие задачу уклонения, обеспечивающие существование оптимальных параметров уклонения и достижимость нижней границы размерности вышеуказанного “отслеживающего подпространства”.

Секция 7. Математическое моделирование и приближенные методы в механике сплошных сред

ВНЕДРЕНИЕ ШТАМПА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Айзикович С.М.[1], Митрин Б.И.[1], Васильев А.С.[2], Волков С.С.[2], Леонтьева А.В.[1]

[1]Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону),
[2]Нижегородский государственный университет (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: saizikovich@gmail.com

Предлагается метод решения плоских и осесимметричных контактных задач линейной теории упругости, термоупругости и электроупругости для полубесконечных тел с функционально-градиентными изотропными и трансверсально изотропными покрытиями. Метод основан на приближении специальными аналитическими выражениями численно построенных трансформант ядер интегральных уравнений соответствующих контактных задач. С помощью метода получены приближенные аналитические решения контактных задач, эффективные в широком диапазоне значений физических и геометрических параметров задачи.

Приводится решение ряда осесимметричных и плоских контактных задач:

(1) плоской контактной задачи о внедрении штампа с плоской подошвой в неоднородную упругую полосу на однородной упругой полуплоскости;
(2) плоской контактной задачи о внедрении параболического штампа в неоднородную упругую полосу на однородной упругой полуплоскости;
(3) осесимметричной контактной задачи о внедрении сферического штампа в неоднородный упругий слой на упругом полупространстве.

Проанализирована связь между трансформантами ядер интегрального уравнения, распределением контактных напряжений и размерами зоны контакта. Исследовано влияние характера изменения упругих модулей в покрытии на характеристики упругого контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-19-10056).

МОДЕЛЬ «КОЧЕВНИКОВ» И «ЗЕМЛЕПАШЦЕВ»: АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИВИЛИЗАЦИИ С ДВУМЯ СПОСОБАМИ ВОСПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКТА[1]

Белоусов Ф.А.

ЦЭМИ РАН (Россия, Москва)

E-mail: sky_tt@list.ru

Построена агент-ориетированная модель, с помощью которой изучается взаимодействие двух типов цивилизаций, которые условно были названы «кочевниками» и «землепашцами». Землепашцы в рамках своей деятельности помимо первичного ресурса занимаются как увеличением его урожайности, так и его переработкой. Это форма воспроизводства лежит в основе всей жизнедеятельности землепашцев и, в частности, выступает регулятором воспроизводства самой популяции землепашцев. Кочевники потребляют первичный природный ресурс, не занимаясь какой-либо деятельностью по воспроизводству дополнительного ресурса. Весь недостающий ресурс они отбирают у окружающих их сообществ землепашцев, а также и кочевников.

В модели задается правило изменения уровня здоровья в зависимости от потребляемого ресурса, а также механизм репродуцирования популяций. Описана процедура агрессии кочевников по отношению к окружающим его особям.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант №16-36-00338

Изучается динамика такого сообщества в зависимости от различных характеристик ареала обитания, в частности от размера и плодородности ареала.

С помощью вариации параметров проведен ряд экспериментов. В результате произведен статистический и эконометрический анализ результатов работы этой модели.

Модель выполнена в программном продукте AnyLogic.

Список литературы

[1] Макаров В.Л., Бекларян Л.А., Белоусов Ф.А. *Установившиеся режимы в модели Хенинга и ее модификациях.*, Машинное обучение и анализ данных (2014). Т. 10. с. 1385-1395.

[2] Epstein J., Axtell R. *Growing artificial societies: Social science from the bottom up.*, Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 1996. 223 p.

[3] Айвазян С.А. *Методы эконометрики.*, М.:Магистр: ИНФРА-М, 2010. с. 512

О ПРИКЛАДНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ТОПОГРАФИИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Билялова Л.Р.

Крымский инженерно-педагогический университет (Россия, Симферополь)

E-mail: l_bilyalova2013@mail.ru

Обеспечение качества система сотовой связи (СЗ) является важной составляющей создания среды, комфортной для проживания жителей и гостей полуострова, поэтому вопросам обеспечения территориального и технического планирования развития региональных сетей телекоммуникаций необходимо уделять должное внимание. В основе любой СЗ система базовых станций (БС), обслуживающих (покрывающих) определенную территорию, размеры и форма которой зависят от технических характеристик антенн, от мощности излучения БС, применяемого стандарта связи, и пр. Сотовые операторы размещают на своих интернет-ресурсах данные о качестве покрытия и стандартах сети, а Роскомнадзор поддерживает карту покрытия магистральных автодорог [1]. По многим оценкам российские СЗ по качеству и покрытию считаются одними из самых современных в мире. При этом одновременно действует несколько разных стандартов, обеспечивающих работоспособность различных классов МТ: LTE (4G) в нескольких частотных диапазонах, сети UMTS (3G) в диапазонах 900 и 2100 МГц, самые распространенные GSM в диапазонах 900 и 1800 МГц, и пр. Для обеспечения стабильной связи при перемещениях абонентов мобильных телефонов (МТ) в пространстве из одной соты в другую, соты должны перекрывать друг друга. В условиях многоэтажной застройки городов, наличия множества различных архитектурных препятствий, невозможности равномерного размещения БС, необходимости одновременного обслуживания большого количества пользователей, мобильные операторы размещают дополнительные мощности, создавая перекрывающиеся зоны для БС. Дополнительным помехообразующим фактором может оказаться сложный рельеф местности, учет которого может положительно сказаться на качестве мобильной связи. По некоторым оценкам работа всех радиопередающих устройств БС разных операторов обеспечивающих покрытие на некоторой территории, может создавать интегральный уровень электромагнитного фона, примерно в 106 раз превосходящий уровень природных электромагнитных возмущений. В данной работе представлен опыт численного моделирования зависимости электромагнитного фона зоны покрытия от мощности электромагнитного излучения БС и мобильных устройств связи, а также топологических особенностей территории на примере города Симферополя. Анализ топографической карты города позволил форму земной поверхности города в модели считалась поверхностью вращения, а именно, поверхностью эллипсоида S [2]. Принималось также, что МТ является направленным излучателем, мощность излучения которого большую часть времени имеет случайное направление. Поэтому принималось в модели, что точечные источники электромагнитного излучения распределены по поверхности S равномерно. Проведенные численные расчеты показали, что при среднем показателе напряженности электромагнитного поля для МТ, напряженность результирующего электромагнитного поля в Симферополе оказалась равной 0,009 В/м. В предположении, что БС располагаются в центрах сот, имеют одинаковую мощность с радиусом действия 1 км и в совокупности покрывают всю площадь эллипсоида, было получено, что количество БС, достаточное для обеспечения устойчивой мобильной связи на территории города, равно 25. Таким образом, было показано, что высокотехнологическое оборудования сети сотовой связи оказывает существенное влияние на параметры электромагнитного поля покрываемой территории, а численное моделирование параметров электромагнитного излучения совокупности БС и МТ с учетом топологии местности позволяет получить количественную оценку для планирования структуры системы сотовой связи.

Список литературы

[1] *Карта покрытия магистральных автодорог. Федеральная служба по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций*, [Электронный ресурс], – Режим доступа: http://rkn.gov.ru/communication/p545/ (Дата обращения 31.08.2016).

[2] Билялова Л.Р., Ситшаева З.З., Билялова Э.В., *Оптимизация структуры системы сотовой связи с учетом параметров электромагнитного излучения*, Ученые записки КИПУ, Сер. «Техн. Науки», № 24(2010), 76–79.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОФИЗИКИ ДЛЯ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Гольдман Н. Л.

МГУ им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: goldman@srcc.msu.ru

Рассматриваемая модель связана с системой теплозащиты из композиционного материала, который в процессе высокотемпературного нагрева подвергается деструкции — необратимым изменениям внутренних параметров (таких как плотность, концентрация компонент материала и т.п.). Конечное состояние термодеструктирующего композиционного материала является своеобразным термоиндикатором, за счет которого можно получить информацию об истории нагрева (недоступную, например, при исследовании движущегося объекта).

Математическая модель разложения теплозащитного композиционного материала под воздействием теплового потока $q(t)$ (прямая задача термодеструкции) состоит в нахождении функций $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ — температуры и концентрации компонент из условий:

$$c(u)\rho(x,t)u_t(x,t) - (\lambda(u)u_x)_x = 0, \quad (x,t) \in Q = \{0 < x < l, 0 < t \le T\}, \tag{1}$$

$$\lambda(u)u_x|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{2}$$

$$\lambda(u)u_x + \epsilon\sigma u^4|_{x=l} = q(t), \quad 0 < t \le T, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$\rho(x,t) = \sum_{\ell=1}^{L} \rho^\ell(x,t), \tag{5}$$

$$\rho^\ell(x,t) = \rho_0^\ell \exp\Big(- A^\ell \int\limits_0^t \exp\Big(- \frac{E^\ell}{u(x,\tau)}\Big)\, d\tau\Big), \tag{6}$$

в которых все входные данные заданы (в том числе, теплофизические характеристики, число стадий композита L, кинетические параметры A^ℓ и E^ℓ каждой ℓ-ой стадии, начальные распределения температуры и концентраций каждой стадии, толщина образца l).

Восстановление истории нагрева по конечному состоянию концентраций стадий в композиционном материале приводит к обратной задаче термодеструкции — найти $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ в области Q, а также тепловой поток $q(t)$ при $0 \le t \le T$, удовлетворяющие условиям (1)–(6) и дополнительному условию при $t = T$:

$$\rho^\ell(d_k, T) = g_k^\ell, \quad \ell = \overline{1, L}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{7}$$

где g_k^ℓ — конечные значения концентраций каждой ℓ-ой стадии после теплового воздействия, полученные в точках $x = d_k$, $0 \le d_k \le l$, K — число точек измерения (например, при микроструктурном анализе).

Вариационная постановка обратной задачи термодеструкции состоит в минимизации функционала невязки

$$J(q) = \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\big(\rho^\ell(d_k,T) - g_k^\ell\big)^2.$$

Ее численное решение вызывает значительные затруднения, вызванные нелинейностью, некорректностью (неустойчивостью к погрешностям входных данных), наличием локальных минимумов функционала невязки. Градиентный метод минимизации и метод Монте-Карло поиска глобального минимума неэффективны из-за больших вычислительных затрат и ограничений на число минимизируемых параметров.

Способ преодоления этих трудностей основан на использовании априорной информации о качественном поведении искомого теплового потока $q(t)$ (участки знакоопределенности, монотонности и т.п.):

$$q \in \Theta_\mu, \quad \Theta_\mu \quad = \quad \{q \in \Theta_R,\ \overline{\mu}(t) \le q_t(t) \le \overline{\overline{\mu}}(t),\ 0 \le t \le T\}, \tag{8}$$

$$q \in \Theta_\nu, \quad \Theta_\nu \quad = \quad \{q \in \Theta_R,\ \nu(t) q_{tt}(t) \ge 0,\ 0 \le t \le T\}, \tag{9}$$

где $\overline{\mu}(t)$, $\overline{\overline{\mu}}(t)$ и $\nu(t)$ — заданные функции, Θ_R — множество граничных режимов, удовлетворяющих ограничению $\|q\|_{L_2[0,T]} \le R$ ($R = \text{const} > 0$). Такой подход, называемый дескриптивной регуляризацией, обладает сильным стабилизирующим эффектом и сужает множество допустимых приближенных решений. Вариационная задача с учетом априорных ограничений (8), (9) принимает вид

$$\inf_{q \in \Theta} J(q), \quad J(q) = \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} p_k^\ell \big(\rho^\ell(d_k, T) - g_k^\ell\big)^2, \tag{10}$$

где $\Theta = \Theta_\mu \cap \Theta_\nu$ — множество допустимых граничных режимов, $\rho^\ell(d_k, T)$ — решение прямой задачи (1)–(6) при $x = d_k$, $t = T$, соответствующее $q(t) \in \Theta$, $p_k^\ell > 0$ — весовые множители.

Численная реализация данного подхода основана на методе проекции сопряженных градиентов, в котором градиент функционала вычисляется с помощью сопряженной задачи, а для проектирования на множества кусочно-монотонных и кусочно-выпуклых функций использованы специальные алгоритмы среднеквадратичной аппроксимации. Результаты численного моделирования по определению теплового воздействия на образец композиционного материала с "тепловой памятью"подтверждают эффективность изложенного метода.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЛЕЮЩЕГО И ВЧЕ-РАЗРЯДОВ В ПАКЕТЕ OPENFOAM

Желтухин В.С., Шемахин А.Ю., Markus H. Thoma, Шарафеев Р.Ф.

Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, Казань),
Казанский национальный исследовательский технологический университет (Россия, Казань),
Justus-Liebig-Universitet Giessen (Германия, Гиссен)

E-mail: vzheltukhin@gmail.com, shemakhin@gmail.com, aleksandr.shemakhin@kpfu.ru

Эффективным способом модификации поверхностей текстильных материалов является обработка в плазме высокочастотного ёмкостного и тлеющего разрядов постоянного тока при давлении 13,3-133 Па [1, 2, 3]. В диапазоне давлений 13,3 - 133 Па высокочастотный ёмкостный разряд близок по своим свойствам к положительному столбу тлеющего разряда. В связи с этим представляет интерес сравнить их характеристики.

Простейшая модель ВЧЕ и тлеющего разрядов описываются системой уравнений (1)-(3):

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mathrm{div}(-D_e \mathrm{grad}(n_e) - \mu_e E n_e) = \alpha n_e, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathrm{div}(-D_i \mathrm{grad}(n_i) + \mu_i E n_i) = \alpha n_e, \tag{2}$$

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} + \mathrm{div}(-D_m \mathrm{grad}(n_m)) = R n_m n_e, \tag{3}$$

$$-\Delta \phi = \frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e), E = -\mathrm{grad}(\phi). \tag{4}$$

Здесь n_e, n_i, n_m – концентрации электронов, ионов и метастабильных атомов, α – коэффициент Таунсенда, D_a, D_i, D_m – коэффициенты диффузии соответствующих компонент плазмы, e – заряд электрона, ϵ_0 – электрическая постоянная, ϕ – электрический потенциал, R - коэффициент рождения метастабильных частиц.

Для n_e, n_i граничные условия одинаковы в случае ВЧЕ и тлеющего разрядов:

$$\gamma_e|_{pow} = -\gamma_i, \frac{\partial n_e}{\partial n}|_{gr,sides} = 0, \frac{\partial n_i}{\partial n}|_{pow,sides} = 0, n_i|_{gr} = 0, n_m|_{gr,pow,sides} = 0. \quad (5)$$

Здесь индексом pow отмечен нагруженный электрод, индексом gr - заземленный, $sides$ - стенки трубки, γ_e - поток электронов, γ_i - поток ионов. Граничные условия для потенциала ϕ в модели тлеющего разряда:

$$\phi_{pow} = V, \phi_{gr} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{sides} = 0, \quad (6)$$

а в модели ВЧЕ-разряда:

$$\phi_{pow} = V cos(\omega t), \phi_{gr} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{sides} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, с математической точки зрения, разница между моделями заключается в граничных условиях для потенциала электрического поля. Система краевых задач решалась с разными шагами по времени. Расчет проводился с использованием библиотек пакета OpenFOAM [4]. Приведены результаты сравнения распределений частиц, электрического поля и тока в ВЧЕ и тлеющем разрядах.

Работа поддержана грантом РФФИ мол_а_дк №16-31-60081 и Минобрнауки РФ (госзадание № 2196 от 01.02.2014).

Список литературы

[1] Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф. Высокочастотная плазменно- струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. Казань: Изд-во КГУ, 2000. 348 с.

[2] Кумпан Е.В., Абдуллин И.Ш., Хамматова В.В., Наумов В.П. Оценка формоустойчивости костюмных тканей после воздействия потока плазмы ВЧЕ разряда / Абдуллин И.Ш., В.В. , В.П. Наумов // Изв. ВУЗов, Сер. технол. текст. пром-ти.– 2006,№4.– С. 92-94. /

[3] Быков Р.А., Владимирцева Е.Л., Шарнина Л.В. Использование низкотемпературной плазмы тлеющего разряда для повышения эффективности водостойкой отделки // Изв. ВУЗов, Сер. технол. текст. пром-ти.- 2008, № 6. – С. 48 - 51

[4] Пакет OpenFOAM [электронный ресурс]. Режим доступа: http://openfoam.com/

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Калинин А.В., Слюняев Н.Н.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Институт прикладной физики РАН (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: avk@mm.unn.ru, slyunyaev.n@gmail.com

Концепция глобальной электрической цепи (ГЭЦ) является основой для понимания электромагнитных явлений в атмосфере Земли [1], [2]. Наиболее важным компонентом ГЭЦ является так называемый квазистационарный ток, который, согласно гипотезе, выдвинутой Вильсоном [3], [4], поддерживается за счет постоянного разделения зарядов в грозовых и других электрифицированных облаках.

Математическому моделированию ГЭЦ уделено большое внимание в последние десятилетия [5]–[10]. Большинство существующих моделей ГЭЦ направлены на поиск распределения квазистационарной плотности тока и электрического поля в атмосфере, с учетом генераторов ГЭЦ, соответствующих электрифицированным облакам. При этом математическое описание глобальной электрической цепи приводит к новым классам задач, не исследованным ранее.

В настоящей работе изучаются задачи для уравнения глобальной атмосферной электрической цепи, сформулированные в квазистационарном электрическом приближении в анизотропной среде. Они формулируются с использованием электрического потенциала для нескольких типов граничных условий, мотивированных приложениями. Следует отметить, что все рассматриваемые задачи относятся к неклассическим задачам математической физики для уравнений псевдопараболического типа, для которых рассмотрены аналоги классических граничных условий Дирихле, Неймана, а также нестандартные граничные условия сопряжения электрического потенциала и токов в симметричных относительно магнитного экватора точках. Представлены результаты численного исследования

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части (код проекта 1727) государственного задания в 2014-2016 гг., поддержана грантом в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ им. Н.И. Лобачевского и грантом Правительства РФ № 14.B25.31.0023.

Список литературы

[1] Rycroft M.J., Harrison R.G., Nicoll K.A., A. Mareev E.A. *An overview of Earth's global electric circuit and atmospheric conductivity* Space Sci. Rev., 137(2008), 1–4, 83–105. doi: 10.1007/s11214-008-9368-6.

[2] Williams E., Mareev E. *Recent progress on the global electrical circuit* Atmos. Res., 135-136(2014), 208–227. doi: 10.1016/j.atmosres.2013.05.015.

[3] Wilson T.R. *Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms* Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, 221(1921), 73–115. doi: 10.1098/rsta.1921.0003.

[4] Wilson T.R. *The electric field of a thundercloud and some of its effects* Proc. Phys. Soc. London, 37(1924), 32D–37D. doi: 10.1088/1478-7814/37/1/314.

[5] Roble R.G., Hays P.B. *A quasi-static model of global atmospheric electricity: 2. Electrical coupling between the upper and lower atmosphere* J. Geophys. Res., 84(1979), A12, 7247–7256. doi: 10.1029/JA084iA12p07247.

[6] Makino M., Ogawa T. *Responses of atmospheric electric field and air-earth current to variations of conductivity profiles* J. Atmos. Terr. Phys., 46(1984), 5, 431–445. doi: 10.1016/0021-9169(84)90087-4.

[7] Kalinin A.V., Slyunyaev N.N., Mareev E.A., Zhidkov A.A. *Stationary and nonstationary models of the global electric circuit: Well-posedness, analytical relations, and numerical implementation* Izv. Atmos. Ocean. Phys., 50(2014), 3, 314–322. doi: 10.1134/S0001433814030074.

[8] Жидков А.А., Калинин А.В. *Некоторые вопросы математического и численного модлирования глобальной электрической цепи в атмосфере* Вестник Нижегородского госуниерситета, 6(2009), 1, 150–158.

[9] Jansky J., Pasko V.P. *Charge balance and ionospheric potential dynamics in timedependent global electric circuit model* J. Geophys. Res. Space Physics, 229(2014), 12, 10184–10203. doi: 10.1002/2014JA020326.

[10] Bayona V., Flyer N., Lucas G.M., Baumgaertner A.J.G. *A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0)* Geosci. Model Dev., 8(2015), 10, 3007–3020. doi: 10.5194/gmd-8-3007-2015.

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СОЧЛЕНЁННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ТЯЖЕЛОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Копачевский Н.Д., Войтицкий В.И.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: kopachevsky@list.ru, victor.voytitsky@gmail.com

В работе приводится вывод уравнений, граничных и начальных условий, формирующих полную постановку задачи о малых колебаниях двух сочленённых тел, закреплённых с помощью сферических шарниров, и частично заполненных тяжёлой вязкой жидкостью. Также выводится закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы.

Во вспомогательных системах координат, связанных с движущимися телами, вычисляются моменты всех сил, действующих на систему, линеаризуются уравнения изменения кинетических моментов относительно точек закрепления. В областях, занятых жидкостями, предполагаются выполненными уравнения неразрывности и линеаризованные уравнения Навье-Стокса. На твёрдых стенках задаются условия прилипания, на свободных поверхностях жидкостей — кинематические и линеаризованные динамические условия, обусловленные равенством динамических напряжений в жидкости и газе. Формулируются условия связи и начальные условия для всех неизвестных полей.

Постановка задачи осуществляется на основе работ Э.И. Батыра и Н.Д. Копачевского, см. [1]-[3]. В первой работе исследовались проблемы малых движений и нормальных колебаний системы сочленённых гиростатов, заполненных вязкой или идеальной жидкостью. Эта задача соответствует отсутствию свободных поверхностей у жидкостей, т.е. случаю полного заполнения полостей жидкостями.

Список литературы

[1] Батыр Э.И., Копачевский Н.Д. *Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов* // Современная математика. Фундаментальные направления. – Том 49 (2013). – С. 5–88.

[2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи.* – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[3] Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid.* — Birkhäuser Verlag. – Basel – Boston – Berlin. 2003. — 444 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146).

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ С ОТВЕРСТИЯМИ

Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З.

Таврическая академия КФУ имени В.И. Вернадского,
Воронежский государственный университет,
Крымский инженерно-педагогический университет
(Россия, Симферополь)

E-mail: kopachevsky@list.ru, szz2008@mail.ru

В настоящей работе рассматривается проблема малых движений несжимаемой жидкости с заданной плотностью $\rho = \mathrm{const}$, которая находится в сосуде с отверстиями в днище.

Предполагается, что на эту гидросистему действуют слабое гравитационного поле с постоянным ускорением $\vec{g}$ и массовые силы $\vec{f}(t,x)$. Считается также, что в равновесном состоянии известна область, занимаемая жидкостью: $\Omega = \Omega_0 \cup \widetilde{\Omega}$; эта область ограничена частью боковой стенки S сосуда, а также свободной поверхностью жидкости $\Gamma = \Gamma_0 \cup \widetilde{\Gamma}$, причем часть Γ_0 находится внутри области Ω_0, а $\widetilde{\Gamma}$ — поверхность жидкости, вытекшей из отверстий в дне сосуда (представлена конечными объемами, свисающими из отверстий, потому считается, что имеет место закрепление этих объемов вдоль границ отверстий, т.е. на этих частях границы $\partial\widetilde{\Gamma}$ выполнено условие Дирихле.

Предполагается также, что все поверхности и границы являются липшицевыми.

Общий подход к рассмотрению таких задач основывается на результатах монографии [1] и подробно описан в работах [2]–[3].

С использованием операторных методов математической физики в работе [5] доказана сильная разрешимость рассматриваемой задачи, а также исследованы ее спектральные свойства.

В работе [4] разработан вычислительный алгоритм для нахождения равновесной поверхности жидкости в цилиндрическом контейнере с донным отверстием, приведены результаты численных расчетов равновесной поверхности капли; исследование проблемы малых колебаний жидкости около найденного равновесного состояния позволило сделать получить достаточные условия для устойчивости этой равновесной поверхности.

В настоящей работе с использованием методики, разработанной в работах [1]–[5], получено обобщение результатов работ [4]–[5]. Доказано утверждение о сильной разрешимости задачи с несколькими донными отверстиями, исследованы спектральные свойства проблемы, получен спектральный признак устойчивости равновесного состояния жидкости, а также предложен вычислительный алгоритм его нахождения.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00066), выполняемого в Воронежском госуниверситете.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи*, М.: Наука, 1989. 416 с.

[2] Kopachevsky N.D., Sitshayeva Z.Z., *On the spectral criterion of stability in the problem of small motions of an ideal capillary fluid with disconnected free surface*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 206, Issue 1 (2015), 39–57.

[3] Kopachevskii N.D., Sitshaeva, Z.Z., *On the Equilibrium and Stability of a Capillary Liquid with Disconnected Free Surface in an Open Vessel*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 205, Issue 6 (2015), 777–790.

[4] Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З., *О равновесии и устойчивости капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытом сосуде*, Естественные и технические науки, Т. 17, № 1 (2015), 41–45.

[5] Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З., *О разрешимости проблемы малых колебаний жидкости с несвязной свободной поверхностью*, Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна—2016», Воронеж: Научная книга, 2016, 211–214.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Кузнецов Е.Б., Будкина Е.М., Яковенко А.Д.

Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет) (Россия, Москва)

E-mail: kuznetsov@mai.ru

Исследуется численное решение краевых задач для нелинейных сингулярно возмущенных дифференциально-алгебраических уравнений. Применяется подход, в основе которого лежит метод пристрелки, используемый совместно с методом Ньютона, и наилучшая параметризация задачи. При решении нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений такой подход применялся в работах [1, 2]. Применение этого подхода к решению краевых задач для нелинейных сингулярно возмущенных дифференциально-алгебраических уравнений [3] и нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [4] показало, что в зависимости от параметра сингулярности и краевых условий, задача может либо не иметь решения, либо иметь одно и большее число решений, которые успешно строятся при помощи предложенного вычислительного алгоритма, использующего метод наилучшей параметризации [5]. Нахождение всех этих решений - задача не простая, но она успешно решается при помощи разработанных вычислительных программ. Рассматривались также другие методы решения задачи: искусственные нейронные сети, конечно-разностный метод. Однако проведенные исследования показали, что достоверное решение этими методами можно получить только в том случае, если проведен предварительный, достаточно глубокий, анализ решаемой задачи. Так, решение задачи при помощи искусственных нейронных сетей [6] методом рестартов показало, что все ветви решения находятся только в том случае, когда число обращений велико. При недостаточном числе обращений определяется только часть решений. Задача о необходимом количестве обращений для получения всех решений остается открытой. При решении задачи конечно-разностным методом также не обойтись без информации о числе решений их вида. В этом случае проблема сводится к решению нелинейной системы алгебраических или трансцендентных уравнений, которое осуществляется методом Ньютона, очень чувствительного к выбору начального приближения. Поэтому, чтобы построить все решения, кроме достаточного числа разбиений интервала, на котором задана задача, еще требуется знать для каждого решения достоверные начальные приближения, а для этого нужна информация о виде решения. Этот подход также продемонстрирован при численом решении нелинейных краевых задач для интегродифференциально-алгебраических уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 16-08-00943.

Список литературы

[1] Красников С.Д., Кузнецов Е.Б., *Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений*, Журнал выч. математ. и математич. физики. Т.45 (2005), N 12. С. 2148-2158.

[2] Кузнецов Е.Б., *Параметризация краевых задач и прохождения точек бифуркации*, М.: Изд-во МАИ, (2016), 160 с.

[3] Будкина Е.М., Кузнецов Е.Б., *Моделирование технологического процесса производства узлов летательных аппаратов на основе наилучшей параметризации краевой задачи для нелинейных дифференциально - алгебраических уравнений*, Вестник МАИ. Т.23 (2016), N 1 С. 189-196.

[4] Афанасьева М.Н., Кузнецов Е.Б., *Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Труды МАИ. (2016), Вып. 88. 16 стр.

[5] Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б., *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*, М.: Эдиториал УРСС, (1999), 222 с.

[6] Budkina E.M., Kuznetsov E.B., Lazovskaya T.V., Leonov S.S., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N., *Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Lecture Notes in Computer Science. Advances in Neural Networks. 13th International Symposium on Neural Networks, ISNN 2016. Proceedings. Springer International Publishing Switzerland. (2016), PP. 277-283.

ПОТЕНЦИАЛ РОБЕНА И СОБСТВЕННЫЙ ВИХРЬ В 2D ОБЛАСТИ

Лежнев В.Г., Бочкарев Д.Н.

Кубанский Государственный Университет (Россия, Краснодар)
E-mail: lzhnvv@mail.ru, temp_m@kubsu.ru

Потенциал Робена определяет чисто циркуляционное безвихревое обтекание профиля S с нулевой скоростью на бесконечности (течение Робена) и вместе с присоединенным вихрем Робена в Q играет определенную роль в теории 2D течений несжимаемой жидкости в ограниченных и неограниченных областях. Функция тока общего решения задачи обтекания профиля S (с произвольной циркуляцией) в области течения Q^+ может быть представлена в виде суммы, включающей как слагаемое потенциал Робена с произвольным множителем – $\gamma R(x)$, $x \in Q^+$. Единственность решения обеспечивается минимизаций среднеквадратической завихренности в области течения. Расширенная формулировка вихревых 2D течений в ограниченных областях (только по граничным значениям функции тока) требуется учитывать собственный вихрь области, исследуются его свойства. Представлены численные течения для области типа треугольник с заданием скорости на границе в форме плотности потенциала Робена.

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ БАЗИС МНОГОФОКУСНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГЛАДКИХ ФОРМ

Ракчеева Т.А.

Институт машиноведения РАН (Россия, Москва)
E-mail: rta_ra@list.ru

Рассматривается задача приближенного аналитического описания геометрической формы, представленной координатами конечного числа точек гладкой замкнутой кривой, в фокусном базисе семейства многофокусных лемнискат. Соответствующие методы описаны в предыдущих работах данного цикла [1, 2]. В данной работе исследована возможность фокусной аппроксимации в более широком классе, близких к лемнискатам, фокусных кривых.

Определяющим инвариантом k-фокусных лемнискат является произведение расстояний r до всех k фокусов внутри кривой, равное ее радиусу R. Рассмотрен более широкий класс многофокусных кривых, квазилемнискат, задаваемых аддитивным инвариантом с функцией расстояния $f(r)$, отвечающей наиболее общим требованиям, предъявляемым к функции, имеющей смысл расстояния. В этом классе лемнискаты представлены функцией $f(r) = \ln r$, а функция $f(r) = r$ определяет, по аналогии с лемнискатами, многофокусные эллипсы [3]. Инвариантность относительно преобразований, сохраняющих геометрическую форму, в частности, преобразований подобия, определяет класс квазилемнискат, состоящий из двух подклассов: $f(r) = c\ln r$ и $f(r) = cr^a$. Интерес для целей аппроксимации форм, кроме лемнискат, могут представлять и степенные функции второго подкласса с дробным показателем степени, значения которого от 0 до 1, составляют непрерывный диапазон многофокусных квазилемнискат от эллипсов до лемнискат.

Свойства квазилемнискат, задаваемые различными функциями расстояния, отражаются на их аппроксимационных возможностях. С убыванием a соответствующее семейство квазилемнискат будет отдаляться по своим свойствам от семейства эллипсов и приближаться к семейству лемнискат. Показано, что квазилемнискаты, в отличие от лемнискат, не могут быть использованы для приближения произвольной гладкой формы с заданной точностью. Таким образом, анализ класса многофокусных квазилемнискат выделяет семейство лемнискат как наиболее адекватные описанию геометрических форм и их инвариантов. Отличительными особенностями фокусного метода являются возможности управления процессом формообразования, моделирования формы с разными метриками расстояния $f(r)$ в каждом из k фокусов, а также задания для произвольной формы своей собственной ортогональной полиполярной системы координат.

Список литературы

[1] Ракчеева Т.А., *Многофокусные лемнискаты: приближение кривых*, Журнал вычислительной математики и математической физики, Т. 50, № 11(2010), 2060–2072.

[2] Ракчеева Т.А., *Фокусная аппроксимация на комплексной плоскости*, Журнал вычислительной математики и математической физики, Т. 51, № 11(2011), 1963–1972.

[3] Ракчеева Т.А., *Квазилемнискаты в задаче приближения формы кривых*, Интеллектуальные системы, № 1(2010), 79–96.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В РАБОЧЕЙ ОБЛАСТИ ГИРОТРОНОВ

Семенов Е.С.

Институт прикладной физики РАН (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: semes@ipfran.ru

Гиротроны по сей день являются лучшими с точки зрения мощности источниками микроволнового излучения вплоть до терагерцового диапазона. Повышенные требования к эффективности и надежности работы гиротронов, особенно при переходе в терагерцовый диапазон частот, ведут к необходимости учета в расчетах неоднородности эмиссии, несоосности и перекоса силовых полей, а также других нежелательных явлений.

Разработанный в ИПФ РАН программный комплекс ANGEL (ANalyzer of a Gyrating ELectrons) [1] позволяет проводить траекторный анализ электронно-оптических систем на базе методов трубок тока [2] и последовательных итераций пространственного заряда.

После подтверждения работоспособности нового кода в двумерных расчетах технологических систем [3], были разработаны алгоритмы трехмерного моделирования. На первом этапе реализован учёт азимутально-несимметричного пространственного заряда (ПЗ), обусловленного зависящими от азимутальной координаты точками старта траекторий и распределения начальных скоростей в этих точках; внешние силовые поля при этом предполагаются азимутально-симметричными.

Простейшим способом является усреднение по азимутальной координате влияния ПЗ на граничные условия [4], что оправданно в случае умеренных значений неоднородности эмиссии. Но если отклонения от среднего в азимутальном распределении ПЗ велики, то и погрешность вычисления поля будет также велика. Особенно это критично для области эмиссии, где пространственный заряд напрямую примыкает к границе (электроду-эмиттеру). Для адекватного моделирования конфигураций со значительной асимметрией ПЗ можно использовать предлагаемую модификацию метода дискретных источников (МДИ).

Рабочая область, где решается уравнение Пуассона, разбивается на несколько подобластей (регионов). Для каждого региона строится свое покрытие границы дискретными источниками и точками коллокации [3]. Граница области, где задается условие Дирихле, разбивается на две части. На одной из частей (ближайшей к точке интегрирования уравнения движения электрона) источниками являются заряженные точки, которые с некоторым шагом покрывают с границу по азимуту. На оставшейся части границы источниками являются заряженные азимутально-симметричные кольца. Таким образом, на части границы возле точки наблюдения условия Дирихле можно выполнить строго, а на периферии — приближённо, т. е. как и ранее — с усреднением влияния ПЗ на границу. Время обращения матрицы СЛАУ в МДИ и расход памяти быстро растут при увеличении несимметричной части границы. Поэтому необходимо соблюдать баланс между размером области, где граничное условие выполняется строго и количеством регионов.

Аналогичный подход имеет смысл использовать не только в трехмерном, но и в азимутально-симметричном случае. В окрестности точки наблюдения источники и точки коллокации можно расположить кучнее, чем на периферии. Тогда более точное решение будет получено при малом *общем* количестве источников, что экономит время как при разложении матрицы СЛАУ, так и при нахождении граничного потенциала. Недостатком является необходимость построения нескольких различных покрытий границы и, соответственно, решение такого же количества СЛАУ, а при интегрировании уравнений движения — необходимость на каждом шаге дополнительно проводить определение региона, в который попала текущая точка интегрирования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-41-02608.

Список литературы

[1] Планкин О. П., Семенов Е. С. *Комплекс программ ANGEL-2DS для моделирования пушки гиротрона. Инструкция для пользователя.* Н. Новгород: ИПФ РАН (2011), 32 с.

[2] Ильин В. П. *Численные методы решения задач электрофизики*, М.: Наука, 1985.

[3] Планкин О. П., Семенов Е. С. *Траекторный анализ электронно-оптической системы технологического гиротрона*, Вестник НГУ, серия «Физика», т. 8, № 2 (2013), с. 44-54.

[4] Семенов Е. С., Планкин О. П., Розенталь Р. М. *Развитие методов анализа электронно-оптических систем гиротронов с нарушениями азимутальной симметрии.* // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. Саратов, 2015. Т. 23, № 3, с. 94–105.

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА ИНЕРЦИОННО-ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ

Слепышев А.А., Воротников Д.И.

Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в Севастополе (Россия, Севастополь)

E-mail: slep55@mail.ru, infsup@yandex.ru

Рассматриваются свободные инерционно-гравитационные внутренние волны в безграничном бассейне постоянной глубины при наличии двумерного вертикально-неоднородного стратифицированного течения без учета турбулентной вязкости и диффузии. Уравнения для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн имеют комплексные коэффициенты, поэтому частота волны и собственная функция комплексные (показано, что имеет место слабое затухание волны). Ввиду этого, фазовый сдвиг между колебаниями вертикальной и горизонтальной скорости отличен от $\pi/2$, поэтому вертикальные потоки импульса отличны от нуля даже при неучете турбулентной вязкости и диффузии. Дисперсионные кривые испытывают влияние критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. В низкочастотной области происходит обрезание дисперсионных кривых, у второй моды на более высокой частоте, чем у первой. Поперечная к направлению распространения волны компонента скорости стоксова дрейфа отлична от нуля и на порядок меньше продольной. Вертикальные волновые потоки импульса могут быть сравнимы с соответствующими турбулентными потоками, либо их превышать.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА ФИЛЬТРАЦИИ АКТИВНЫХ РАСТВОРОВ

Филиппов А.И., Михайлов П.Н.

Башкирский государственный университет (Россия, Стерлитамак), Институт прикладных исследований Республики Башкортостан (Россия, Стерлитамак)

E-mail: filippovai@rambler.ru, mihaylovpn@mail.ru

В работе осуществлена постановка термодиффузионной задачи о взаимосвязанных полях концентрации и температуры, возникающих в пористом пласте при закачке растворенных радиоактивных веществ. В уравнении, описывающем миграцию радиоактивных растворов, учитывается конвективный перенос, осложненный наличием пористости скелета и протекающими массообменными процессами между загрязнителем и скелетом [1].

На примере указанных задач планируется ознакомить с особенностями применения асимптотического метода в задачах сопряжения. С использованием свободного параметра асимптотического разложения температурная и диффузионная задачи представлены в виде бесконечной последовательности краевых задач для коэффициентов разложения искомого решения в асимптотический ряд. Произведено "расцепление"соответствующей цепочки уравнений и на этой основе осуществлена постановка краевых задач смешанного типа со следами производных из внешних областей для нулевого и первого коэффициентов разложения и остаточного члена.

Установлено, что независимо от значений параметра асимптотического разложения, как в задаче теплопереноса, так и массоперноса, нулевое приближение совпадает с решением усредненной исходной задачи. Что особенно важно - осредненные параметризованная и исходная (непараметризованная) задачи всегда совпадают.

На основании полученного решения установлены расчетные формулы для полей температуры, вызванных энергией распада и различием температур пласта и закачиваемой жидкости. В зависимости от периода полураспада радиоактивного вещества, содержащегося в воде, на некотором фиксированном расстоянии от нагнетательной скважины наблюдается температурный максимум. Который тем ближе к скважине, чем меньше период полураспада и тем температурный эффект выше, чем больше концентрация раствора.

Предлагаемая в работе математическая модель взаимосвязанных полей температуры и концентрации растворов в пористых пластах позволяет выделить и определить размеры зоны загрязнения, теплового возмущения и зоны чистой воды, появляющейся в результате оседания радионуклидов на скелете пласта. Определено понятие "скорость конвективного переноса массы"и получена ее формула. По аналитическим выражениям поля плотностей и температуры установлены радиусы радионуклидного загрязнения и теплового возмущения. Таким образом, по измерению температуры в контрольных скважинах можно определить зону заражения пористого пласта - коллектора радиоактивными отходами.

Определен критический коэффициент Генри, равный отношению объемных теплоемкостей скелета и жидкости, не зависящий от пористости. В случае, когда коэффициент сорбции больше критического, фронт теплового возмущения опережает фронт радионуклидного загрязнения. Тепловое поле между фронтами ("чистое тепло"без радиации) обусловлено конвективным выносом тепла закачиваемой жидкостью из радионуклидной области. Когда же коэффициент сорбции радионуклида меньше критического, фронт теплового возмущения отстает от фронта нуклидного возмущения, так как скорость переноса тепла в этом случае меньше скорости фильтрации радионуклидов в пористом пласте, а температурные возмущения оказываются почти в пять раз больше, что объясняется преобладающим локализованным выделением тепла вблизи температурного фронта. Последним двум случаям отвечают различные технологии захоронения. На практике при захоронении радиоактивных отходов производят специальную обработку для повышения сорбционных свойств пласта. Таким образом, критический коэффициент Генри может выступать критерием качества подготовки оттесняющего и подготавливающего растворов.

Список литературы

[1] Филиппов А.И, Михайлов П.Н., Ковальский А.А. Поля радиоактивных изотопов в пористой среде. *Уфа: Гилем, Башкирская Энциклопедия*, (2015), 224 с.

ОБ АНАЛИЗЕ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ И КЭ СХЕМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

Чекмарев Д.Т.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: 4ekm@mm.unn.ru

При численном решении задач механики сплошных сред широко используются вариационно-разностные методы, основанные на вариационных постановках математических задач. К ним относится и метод конечных элементов. При разработке и анализе свойств основанных на данном подходе численных схем сеточные операторы как правило не записываются в явном виде. Это отличает их от конечно-разностных методов. Соответственно и методы анализа конечно-разностных и вариационно-разностных схем имеют значительные отличия, то есть имеется разрыв между теорией разностных схем и теорией метода конечных элементов.

Рассматривается разработанный автором математический аппарат, позволяющий на регулярных и особенно на равномерных (в том числе косоугольных) сетках получить явное конечно-разностное представление схем метода конечных элементов [1, 2]. Дальнейший анализ полученного представления методами теории разностных схем позволяет эффективно исследовать как традиционные (аппроксимация и устойчивость), так и более тонкие свойства схем МКЭ [3]. Отметим, что аналогичный анализ с точки зрения теории метода конечных элементов в ряде случаев не представляется возможным.

Рассматриваются примеры применения данного подхода к анализу и усовершенствованию вариационно-разностных и КЭ схем решения задач теории оболочек типа Тимошенко и теории упругости [4, 5]. В результате применения данного анализа удалось усовершенствовать некоторые существующие и предложить новые эффективные схемы метода конечных элементов [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов МОН РФ (соглашение от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ) и РФФИ (грант 14-01-00660 а).

Список литературы

[1] Чекмарев Д.Т. *Построение конечноразностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента* Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М.: Товарищ. науч. изданий КМК, 1999, 129–138.

[2] Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. *Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. Учебное пособие.* Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2000. 118 с.

[3] Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. *Об индексной коммутативности численного дифференцирования* Ж. вычисл. математики и мат. физики 29(1989), № 5, 662–674.

[4] Chekmarev Dmitry T. *Some Results of FEM Schemes Analysis by Finite Difference Method* Finite Difference Methods, Theory and Applications. Volume 9045 of the series Lecture Notes in Computer Science, 2014, 153–160.

[5] Крутова К.А., Спирин С.В., Чекмарев Д.Т. *О влиянии взаимного расположения конечных элементов на точность численного решения задач теории упругости* Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. Сб. Нижегород. ун-т., 2013, Вып. 75, № 4, 77–87.

[6] Чекмарев Д.Т. *Численные схемы метода конечного элемента на "ажурных"сетках* Вопросы атомной науки и техники, Сер. Математическое моделирование физических процессов, 2009, Вып. 2, 49–54.

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕДУКЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ГРАНИЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Арутюнян Р.В.

Московский технический университет связи и информатики (Россия, Москва)

E-mail: Rob57@mail.ru

Рассмотрим систему линейных уравнений I-го порядка с постоянными коэффициентами: $\mathbf{A}(\partial/\partial x)u(x) = F(x), x \in \Omega$, где $\Omega \subseteq R^n$ – область с кусочно-гладкой границей Γ, $u(x)$ - вектор-функция n переменных, $u(x) \in R^q, F(x) \in R^m, m \geq q$. Пусть $\mathbf{A}^*$ – дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору $\mathbf{A}$, а $G(x)$ – решение системы $\mathbf{A}^*(\partial/\partial x)G(x) = E(x), x \in R^n$, где $E(x) = \delta(x)E, E-$ единичная матрица, $\delta(x)-$ дельта-функция. С помощью формул Грина получаем интегральное представление решения ДУ:

$$u(x)\int\limits_{\Omega}\delta(y-x)dy = \int\limits_{\Omega}G^T(y-x)F(y)dy - \int\limits_{\Gamma}G^T(y-x)Q(y)u(y)d\Gamma,$$

$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk}n_k(y), y \in \Gamma, i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,q;$ $n_k(y)-$ координаты внешней нормали к Ω. Формула обобщает известные интегральные представления решений систем ДУ. От нее переходим к системе граничных интегральных уравнений (ГИУ) относительно базиса $\sigma(x) = C(x)u(x)$, где $C(x)$ – матрица перехода.

Исходная система ДУ редуцируется к ГИУ I-го или II-го рода. Корректность сингулярных ГИУ анализируется при помощи теории символа. Определяются ранг r и базисные вектора линейной оболочки строк матрицы $\mathbf{A} : \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$. ГИУ формулируются для какого-то базиса, например, для $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, p < r$, и решаются относительно $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_r$. Корректная система ГИУ соответствует невырожденному минору матрицы $E/2 + (2\pi)^{(n-1)/2}F(G^T,\omega)F(\mathbf{A})$, где $F(G^T,\omega)-$ фурье-образ $G^T(x), F(\mathbf{A})-$ фурье-образ оператора системы ДУ на произвольной гиперплоскости. Численное решение ГИУ находится относительно $\sigma(x)$. ГИУ умножается на $C(x)$ и учитывается, что $\sigma(x) = C(x)u(x):$

$$\sigma(x)\int\limits_{\Omega}\delta(y-x)dy = \int\limits_{\Omega}C(x)G^T(y-x)F(y)dy - \int\limits_{\Gamma}C(x)G^T(y-x)Q(y)u(y)d\Gamma,$$

Qu представляем в виде $W\sigma$, где W находим из условия: $||Q - WC|| \to \min_W$, откуда, $Qu = QC^T[CC^T]^{-1}\sigma$. В итоге ГИУ имеют вид:

$$\sigma(x)\int\limits_{\Omega}\delta(y-x)dy = \int\limits_{\Gamma}K(x,y)\sigma(y)dy + h(x),$$

$$K(x,y) = -C(x)G^T(y-x)Q(y)C^T(y)[C(y)C^T(y)]^{-1}, \quad h(x) = \int\limits_{\Omega}C(x)G^T(y-x)F(y)dy,$$

В данной технологии ГИУ требуются лишь минимальная информация о свойствах решаемой системы ДУ и моделируемого объекта.

Секция 8. Дискретная математика и информатика. Методика преподавания математики в высшей школе и история математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ КАК ФОРМА ПРОВЕДЕНИЯ ЗАЧЁТНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Балицкий В.А., Войтицкий В.И.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

В последнее время среди учащихся средних школ всё большую популярность и важность получают внеклассные мероприятия и математические соревнования. В игровой и занимательной форме гораздо лучше усваивается информация, появляется дополнительная мотивация к изучению предмета. Имеется достаточно большое число математических соревнований-игр, которые успешно проводятся среди российских школьников. Это математические бои (соревнование докладчиков и оппонентов), математическая регата (командное соревнование на скорость решения задач), математический квест (игра для младших школьников с элементами ориентирования). Также появляются новые игры, например, математическое домино, дуэль (см. правила, например, тут http://adygmath.ru/content/files/smena2009/tmg/).

Подобные мероприятия можно проводить как зачётные занятия для учеников одного класса или студентов младших курсов. В 2016-2017 учебном году среди студентов факультета математики и информатики планируется впервые провести командные соревнования (несколько игр из вышеперечисленных) по знанию базовых дисциплин (математический анализ, линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения). Лучшие студенты могут быть награждены дополнительными баллами при сдаче соответствующих зачётов и экзаменов.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Белозуб В.А., Козлова М.Г.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)
E-mail: art-inf@mail.ru

Многие сложные явления и объекты в биологии, социологии, физике, экономике исследуются путем составления и изучения их математических моделей и значительное место в таком подходе принадлежит интегральным уравнениям 1-го рода. Задача восстановления изображений по данным косвенных измерений является востребованной в различных приложениях. Кроме традиционных задач восстановления двумерных изображений (фотоснимков, карт), выделяется задача дистанционного зондирования [1]. Как правило, моделируются такие задачи линейными и нелинейными уравнениями 1-го рода и зачастую являются некорректными. Для их решения разрабатываются регуляризирующие алгоритмы [2-5]. Однако численные алгоритмы не всегда дают приемлемые результаты. Для повышения качества восстановленной функции используется информация (знания) о решении, моделях, алгоритмах, погрешностях, прецедентах. Чтобы принимать решение относительно использования в задаче восстановления доступной информации, необходимо множество разных моделей, алгоритмов, их реализаций и соответствующих баз знаний, которые и лежат в основе формирования интеллектуальной системы по восстановлению изображений [6]. Предполагается, что в будущем такая интеллектуальная система (ИС) обработки данных косвенных измерений может строиться по модульному типу. Главным элементом такой ИС будет интеллектуальный агент (ИА) специализированного вида, т.е. использующий свой набор знаний, информации, алгоритмов по восстановлению требуемых изображений (данных, информации и т.п.). Подсистемы, интеллектуальные агенты, будут решать задачу, используя поступающую априорную информацию или знания о решении, полученные в ходе работы других ИА. Взаимодействие между подсистемами инициируется интеллектуальной системой управления (ИСУ). Таким образом, задача дистанционного зондирования, решаемая одним ИА, может итерационно уточняться другим ИА, дополняться информацией об участках монотонности, точках экстремумов, участках гладкости.

В работе разработаны теоретические положения, методы, алгоритмы, которые лежат в основе работы ИА по восстановлению изображений и ИС в целом. Основной задачей является учет знаний (информации), необходимых для восстановления искомого изображения. Для разработки регуляризирующих алгоритмов восстановления в системах косвенных измерений, моделируемых нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями первого рода, учет знаний является базовым. Разработан интеллектуальный комплекс решения одномерных и двумерных интегральных уравнений 1-го рода, в частности, уравнений типа свертки методом регуляризации А.Н. Тихонова [5] с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье и выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки, продемонстрированы результаты численных квазиреальных экспериментов. Для наглядности программа реализована в среде Mathematica. Исследован знаниеориентированный подход к задаче восстановления изображений с учетом данных косвенных измерений и априорной информации о задаче, моделях, алгоритмах. В отличии от существующих работ, предложена универсальная версия модуля вычислений для решения одномерных и двумерных интегральных уравнений 1-го рода типа свертки методом регуляризации А.Н. Тихонова с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье.

Список литературы

[1] Мельник, Ю.А. *Радиолокационные методы исследования Земли* / Ю.А. Мельник, С.Г. Зубкович, В.Д. Степаненко; под ред. Ю.А. Мельник. - М.: Советское радио,1980. – 264с.

[2] Василенко, Г.И. *Восстановление изображений* / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. – М.: Радио и связь, 1986. – 304с.

[3] Васин, В.В. *Некоторые задачи с априорной информацией* / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993. – 263с.

[4] Гончарский, А.В. *Некорректные задачи астрофизики* / А.В. Гончарский, А.М. Черепащук, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1985. – 352с.

[5] Тихонов, А.Н. *Регуляризующие алгоритмы и априорная информация* / А.Н. Тихонов [и др.] – М.: Наука, 1983. – 200с.

[6] Донской, В.И. *Интеллектуальное управление: обзор* / В.И. Донской // Таврический вестник информатики и математики / под ред. В.И. Донской. – т. 2. – Симферополь: 2014. – С. 14-35.

ОБ ИНФОРМАЦИОННО-КОМПЕТЕНТНОСТНОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ

Билялова Л.Р., Ситшаева З.З.

Крымский инженерно-педагогический университет (Россия, Симферополь)

E-mail: l_bilyalova2013@mail.ru, szz2008@mail.ru

В работе представлены некоторые технологические аспекты формирования общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций студентов гуманитарных направлений подготовки средствами свободно распространяемых информационно-компьютерных технологий.

Акцент при этом осуществляется на выбор в качестве формирующих образовательных технологий таких свободно распространяемых прикладных программ, как, например, текстовый процессор OpenOffice.org Writer (в дальнейшем — OW), Internet-браузеры Яндекс.Браузер, Opera, Mozilla Firefox и т.п. (см. [1]).

Как известно, используемые в качестве образовательных программные технологии (в дальнейшем — ПТ) должны обладать набором функциональных возможностей, позволяющим обеспечить формирование необходимых будущему специалисту умений, таких как создание, редактирование, форматирование, комментирование, структурирование различных типов текстовой информации, работа с поисковыми системами и т.д. При этом немаловажным является как содержательное наполнение, так и определенная последовательность образовательных этапов подготовки специалиста (см., например, [2]).

На начальном этапе использования ПТ в качестве формирующего компетентностного инструмента целесообразно освоить возможности установки различных параметров работы OW, в том числе последовательность действий по настройке языка. Поскольку будущая профессиональная деятельность специалиста-гуманитария (филолога, журналиста, историка, педагога) неотделима от обработки текстовой информации, поэтому целесообразно освоить инструменты OW, предназначенные для автоматизации процедур набора текста (автодополнение и автозамена), эффективного форматирования документа: стили страницы, абзаца, символа, списка и др. [3].

Сфера профессиональной деятельности гуманитариев связана, в том числе, с умением структурировать текст, оформлять библиографические описания и библиографические ссылки, создавать оглавления и предметные указатели, рецензировать текст, добавлять сноски и примечания. Поэтому представляется полезным освоение студентами и некоторых специальных возможностей OW по оформлению и рецензированию документа (вставка сносок и примечаний) и обзору исправлений, позволяющему отслеживать внесенные исправления при организации коллективной работы над документом [3].

Подготовка и размещение информации в сети Интернет — актуальное и востребованное умение современных гуманитариев, поэтому технологии создания web-страниц на основе документов OW и с помощью Веб-мастера необходимо включать в учебную программу их подготовки.

Современные информационные технологии с их функциональными возможностями создания, обмена, поиска, анализа и учета текстовой информации открывают широкие возможности для качественной подготовки высококвалифицированных, отвечающих современным требованиям и потому востребованных специалистов гуманитарной направленности. Это означает, что их следует включать в содержание образовательных программ высшего профессионального образования.

Список литературы

[1] Маслинский К.А. *Профессиональные задачи филолога и свободное программное обеспечение*, [Электронный ресурс], Режим доступа: http://heap.altlinux.org/pereslavl2006/maslinsky/abstract.html (дата обращения: 14.11.2015).

[2] Билялова Л.Р., Газиев Э.Л., Ситшаева З.З., Узаков Т.К., *Особенности формирования компетенций студентов филологических специальностей средствами свободного программного обеспечения*, Научный альманах, № 12 (2015), 187–190.

[3] Билялова Л.Р., Газиев Э.Л., Ситшаева З.З., Узаков Т.К., *Новые информационные технологии. Практикум*, Симферополь, ИП Хотеева Л.В., 2016, 136 с.

О СХЕМНОЙ СЛОЖНОСТИ УМНОЖЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПОЛЯХ

Бурцев А.А.

Московский физико-технический институт (государственный университет) (Россия, Москва)

E-mail: a-burtsev@yandex.ru

Основной целью работы является получение эффективных верхних оценок сложности схем из двухвходовых булевых элементов для арифметики в конечных полях, а также для умножения многочленов в конечных полях. Схемная реализация арифметики в конечных полях находит применение в кодировании, криптографии, цифровой обработке сигналов, а также может быть использована в программной реализации арифметических операций в конечных полях в компьютерной алгебре.

Обозначения: $GF(q)$ – конечное поле порядка q, n – произвольное натуральное число, p – простое, $M(G)$ – схемная сложность умножения в поле G, $A(p)$ – сложность сложения, в поле $GF(p)$, $M(n)$ – сложность умножения многочленов степени меньшей n над $GF(7^2)$.

Лемма. *Умножение в $GF(7)$ выполняется схемой сложности 25.*

Теорема. *Умножение элементов поля $GF(7^{14n})$ может быть выполнено схемой сложности*

$$M(GF(7^{14n})) \leq 13M(GF(7^{2n})) + 258nA(7).$$

В частности, при $n = 31$,

$$M(GF(7^{14\cdot 31})) \leq 698\ 554.$$

Теорема. *Умножение в поле $GF(7^{14n})$ элемента f, представимого многочленом степени 6, на элемент g, представимый многочленом степени 4 с единичным старшим коэффициентом, имеет сложность не выше*

$$10M(GF(7^{2n})) + 176nA(7).$$

В частности, при $n = 31$, сложность умножения не превосходит 557 392.

Порядок поля $GF(7^{14\cdot 31})$ приблизительно равен 2^{1000}, что является минимально возможным порядком поля, при котором обеспечивается необходимый уровень криптографической надёжности согласно современным стандартам. Этим мотивируется выбор указанных примеров.

Теорема. *Многочлены степени $n-1$ над $GF(7^2)$ могут быть умножены со сложностью $M(n) \lesssim \frac{609\ 707}{8}\ n^{\log_5 7}$.*

Список литературы

[1] Бурцев А. А., Гашков С. Б. *О схемной реализации арифметики в конечных полях характеристики 7 для вычисления спариваний.* // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 35–40.

МНОГОАГЕНТНЫЙ ПОДХОД В СЕТЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Германчук М.С.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)
E-mail: m.german4uk@yandex.ru

Исследуются оптимизационные задачи типа многих коммивояжеров (ЗК). В отличие от результатов классической задачи, рассматриваются модели задач, которые учитывают априорную, прецедентную, дополнительную информацию, знания о модели, целевых функциях в условиях неопределенности. В частности, в виде многокритериальных задач псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивными ограничениями. Многоагентный знаниеориентированный подход реализуется в виде интеллектуальных агентов (ИА), перерабатывающих знания в решение. ИА реализуют декомпозицию задачи с помощью комбинаций эвристических алгоритмов и обмена знаниями.

В экстремальных задачах анализа и синтеза на графах учитываются знания, информация, факты и прецеденты. Разнообразие задач диктуется классами графов, моделирующих транспортные сети; структурой графов, их размерностью, возможностью декомпозиции; характером целевых функций и полнотой информации о коэффициентах критериев; возможностью дизъюнктивного представления знаний об ограничениях. Выделение блоков в задачах ДО типа многих ИА интерпретируется как процесс кластеризации, определяющий специфику задачи. В случае, когда явно присутствуют кластеры (иерархическая инфраструктура города, региона и т.д.), используются известные алгоритмы кластеризации. Декомпозиция задачи (с помощью процедуры максимального разреза) определяет необходимое число ИА. Эвристики используются, как в задаче о максимальном разрезе, так и для решения ЗК на кластерах. В решении задачи о максимальном разрезе предварительно извлекается информация: по распределению расстояний; по наличию кластеров, качественная информация о компонентах, экспертная и прецедентная.

Например, алгоритм построения разреза содержит шаги: найти максимальный вес c_{ij}, если на дугу (i,j) не наложено ограничений, то вершину i включить в маршрут первого ИА, а вершину j – в маршрут второго, иначе, взять следующую по рейтингу дугу (k,p) и повторить процедуру, а дугу (i,j) включить в маршрут одного из ИА и т.д. Параллельная работа трех агентов осуществляет декомпозицию и решает ЗК. При реализации схемы с обязательными ограничениями, дополнительной информацией на компонентах и построении маршрута обхода множеств возникает ряд задач псевдобулевой условной оптимизации с ДНФ ограничениями.

В работах [1-2] приведен подход к решению многокритериальных задач нескольких коммивояжеров, как агентных в самоорганизующейся системе. Многоагентная задача на изменяющейся сети естественно возникает, когда в рамках большой сетевой системы реализуется оптимальная сеть (синтез сети). На базе известных решений, условий устойчивости проводится реоптимизация относительно добавления вершин, дуг, внутренних условий (ДНФ ограничений), знаний, по количеству ИА. Необходимое число ИА связано с декомпозицией задачи, с выделением характерных кластеров (город, район и т.п.). С другой стороны решение задачи кластеризации может осуществляться с помощью ИА.

В рассмотренных обобщенных многоагентных задачах типа коммивояжера, учитываются знания, информация, данные необходимые для интеллектуального управления агентами [3], так и локального управления самого агента, алгоритмы декомпозиции, кластеризации, анализа и синтеза сети. Предварительные численные расчеты подтверждают необходимость создания широкого комплекса алгоритмов, участвующих в оптимальной композиции метаэвристик и наполняющих системы управления.

Список литературы

[1] Козлова М.Г. *Обобщения задачи коммивояжера: знаниеориентированный подход* / М.Г. Козлова, М.С. Германчук // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): матеріали IV Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Полтава, 21-23 берез. 2013 р.) / за ред. Ємця О.О. – Полтава: ПУЕТ, 2013. – С. 147-150.

[2] Германчук М.С. *Использование информации в задачах типа многих коммивояжеров* М.С. Использование информации в задачах типа многих коммивояжеров / М.С. Германчук, М.Г. Козлова // XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2014). Тезисы докладов. – Симферополь: ТНУ, 2014. – С.65.

[3] Донской В.И. *Интеллектуальное управление: обзор* / В.И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. – 2014. – № 2 (25). – С.19-35.

О ВЕРОЯТНОСТИ 0-СОБЫТИЯ В МАЛОЙ ВЫБОРКЕ

Гуров С.И.

МГУ им. М. В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: sgur@cs.msu.ru

Рассматривается оценивание неслучайной, но неизвестной вероятности p осуществления случайного события X в единичном испытании, ни разу не наблюдавшегося в $n > 0$ испытаниях по схеме Бернулли (0-*события*). Это означает, что получена реализация $x^0 = (0, \ldots, 0)$ случайного процесса $\mathfrak{X}_p$. В том случае классические как сама точная оценка p, так и оценка её дисперсии нулевые, что часто неприемлемо на практике.

В работе конкретизируется понятие «малой выборки». Рассматриваются возможные точечные оценки 0-события и на основе оригинального подхода вводится оценка $\widehat{p}_0$, получаемая при замене рассмотрения нулевой реализации $x^0 = (0, \ldots, 0)$ процесса $\mathfrak{X}_p$ некоторой другой его реализацией x^1, которая содержит хотя бы одно значение 1 [4]. Для возможности такой замены используется точный критерий Фишера.

Далее предлагается интервальная оценка вероятности 0-события. В условиях малой выборки предлагается использовать принцип согласованности [2, 3], объединяющий частотный и бейесовский подходы статистических оценок.

Предложены границы для n, при которых выборку можно считать малой.

Список литературы

[1] *Ван дер Варден Б.Л.* Математическая статистика. — М.: Иностранная литература, 1960.

[2] *Гуров С.И.* Принцип согласованности и бейесовское интервальное оценивание // Таврический вестник информатики и математики, 2003, Вып. 2. — С. 14-27.

[3] *Гуров С.И.* Интервальное оценивание на основе принципа согласованности // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика», № 14 (74), вып. 9, 2008. — С. 77-93.

[4] *Gurov S.* 0-event: Point and Interval Estimates // Mathematics and Statistics 1(2): 53-58, 2013.

[5] *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974.

[6] *Закс Л.* Статистическое оценивание. — М.: Статистика, 1976.

[7] *Кендал М., Стюарт А.* Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.

[8] *Леман Э.* Теория точечного оценивания. — М.: Наука, 1991.

[9] *Gurov S.* 0-event: Point and Interval Estimates // Mathematics and Statistics 1(2): 53-58, 2013.

[10] *Fisher R.A.* On the mathematical foundations of theoretical statistics // Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A, 1921, v. 222.

[11] *Fisher R.A.* The fiducial argument in statistical inference // Annals of Eugenics, Vol. 5, 1935. — C. 391–398.

ТРИУМФАТОР НАУКИ СРЕДНЕВЕКОВОГО ВОСТОКА

Иноятов С.И., Арипова Х.А.

Навоийский государственный педагогический институт (Узбекистан, Навои)

E-mail: nshkalikova@yandex.ru

Американский историк Дж. Сартон так сказал об этом выдающемся ученом-энциклопедисте: "История астрономии и математики, астрологии и географии, антропологии и этнографии и философии, археологии и философии, ботаники и минералогии осиротела бы без его великого имени". Его полное имя Абу Райхан Мухаммад ибн Ахмад аль-Бируни. Родился он 4 сентября 973 года в древней столице Хорезма - городе Кят. О ранних годах жизни Бируни известно очень мало, кроме того, что был он круглым сиротой. За большой нос его прозвали "Бурунлы"("носатый"). Но за некрасивой внешностью скрывался проницательный ум, который и был замечен визирем и двоюродным братом Хорезмшаха Ираком. На склоне лет Бируни напишет: "...Семья Ираков вскормила меня своим молоком и вывела меня в люди..."

Он получил блестящее математическое и философское образование. Первым учителем Бируни был Абу Наср Мансур ибн Ирак Аль-Джади, автор фундаментальных трудов по астрономии, математике и тригонометрии. Великий учёный из Хорезма, автор многочисленных капитальных трудов по истории, географии, филологии, астрономии, математике, геодезии, минералогии, фармакологии, геологии и др., Бируни владел почти всеми науками своего времени. Еще в юношеские годы аль-Бируни стал известен среди астрономов, математиков, писателей, врачей. В 21 год он сконструировал астролябию для наблюдения солнечных затмений, а также одним из первых изготовил глобус. Одновременно для определения угла наклона эклиптики ученый проводил наблюдения и исследования в области сферической тригонометрии.

В 1004 году Хорезмшах Али ибн Мамун открыл научное общество под названием "Академия Мамуна". Бируни был организатором научной работы этой академии и сам принимал в ней активное участие. Кроме научной работы, он выполнял при дворе Хорезмшахов важные дипломатические поручения, что свидетельствует о высокой общей культуре ученого. Бируни владел многими языками, в том числе персидским, согдийским, сирийским, греческим, еврейским, а позже изучил и санскрит.

Отдельно следует сказать о вкладе Бируни в развитие арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Соображения Бируни в области арифметики очень близки к взглядам греческих математиков. Рассматривая целые числа, он называет их четными и нечетными, простыми и сложными. По старым традициям он пишет о числах фигурных, плоских (или квадратных), телесных (или кубических) и т. д., а также дает пояснения к действиям с целыми числами, повышения их в степень, извлечения корней. Не обошел своим вниманием Бируни теорию дробей и действия с ними. Свои взгляды относительно алгебры аль-Бируни изложил в сочинении "Наука звезд". Сначала он подробно рассматривает основные операции, с помощью которых алгебраические уравнения можно свести к более простому виду, и дает правило знаков. Подобно аль-Хорезми, Бируни распределяет уравнения на типы и объясняет, как их решать. Способов решения кубических уравнений он не дает. В этом же произведении Бируни излагает свои соображения по геометрии. Сначала он приводит определение геометрических понятий, близких к евклидовым. При этом ученый рекомендует начинать изучать геометрию с определения тела, затем изучать поверхности, линии и точки. Параллельные линии он рассматривает как прямые, лежащие в одной плоскости и расстояние между ними не изменяется. В другом произведении Бируни рассматривает вопросы построения и вычисления сторон правильных многоугольников. Он подробно объясняет их построение и дает формулы для вычисления их сторон. Здесь же рассматривает задачу трисекции угла.

В книге "Канон Масуда"Бируни изложил свои соображения по тригонометрии. Прежде всего он дает определение основным шести тригонометрическим функциям и впервые однотипно объясняет их на круге. К нему на круге объясняли только синус, косинус, секанс и косеканс, а тангенс и котангес - на прямоугольном треугольнике. Ученый подробно рассматривает особенности каждой функции и дает алгебраическую зависимость между ними в виде отдельных формул, очень близких к современным. Здесь же он составляет таблицы зависимости тригонометрических величин, которыми позднее пользовался математик Насреддин Туси и ученые Самаркандской школы. Дальнейшее развитие тригонометрия в странах ислама не имела. В Европе такого уровня тригонометрия достигла лишь в XV в.

За свою жизнь аль-Бируни написал 143 произведения, а 27 произведений с его участием создали другие авторы. Эти произведения, как уже отмечалось, были посвящены научным вопросом по математике, астрономии, географии, философии. Трудно назвать отрасль научной деятельности, которой не занимался бы аль-Бируни.

Список литературы

[1] Шарипов А. Великий мыслитель Абу Райхан Бируни.- Т., 1972.
[2] Гулямов Я. Г. Эпоха Бируни./Ж.: "Общественные науки в Узбекистане".- Т., 1972.
[3] Матвиевская Г.П. Учение о числе на среднем Востоке.- Т., 1967.
[4] Юшкевич А.П. История математики в средние века. - М., 1968.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ АГЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Козлова М.Г.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: art-inf@mail.ru

Агентно-ориентированный подход в интеллектуальном управлении (ИУ) сложными системами (социально-экономическими и тому подобными) является перспективным и востребованным [3,4]. Задачи ИУ сложными системами требуют детального учета логистики инфраструктурных потоков. Информационные, ресурсные потоки связаны с различного типа сетями: транспортными, водо-, электро-, теплоснабжения; предоставления услуг; сбора, вывоза и переработки бытовых отходов; рекреационными. В ряде работ указывается на актуальность исследований сетевых транспортных задач, разнообразие их постановок. В зависимости от исходной информации и критериев, связанных с эффективностью структурных преобразований, рассматриваются методы анализа и синтеза оптимальной транспортной сети. Задачи эффективного управления потоками на таких сетях носят как локальный, так и глобальный характер. Локальность связана с естественной локальностью сетевых структур или является следствием сложности системы, необходимостью ее декомпозиции. Для таких структур ставится в соответствие МАИС – многоагентная система интеллектуальных агентов (ИА). С помощью МАИС решаются задачи маршрутизации, агентные задачи типа многих коммивояжеров [1-2], которые имеют широкие приложения. Практическая востребованность таких задач определяет актуальность исследования.

Многообразие математических моделей для такого класса задач определяется необходимостью учета исходной (входной), априорной, извлекаемой информацией, ее полнотой, неопределенностью и т.п. Соответствующие оптимизационные сетевые задачи связаны с дискретной оптимизацией (ДО) в условиях многокритериальности, большой размерности, с дополнительными ограничениями, связанными с требованиями к прохождению маршрутов, транспортным средствам и т.п. Для разработки алгоритмов и практического инструментария решения такого класса задач необходим учет информации, знаний, прецедентов, набор широкого класса точных, приближенных методов, метаэвристик и их композиций, учитывающих специфику задачи. Анализ, синтез, изменение структуры сети, ее кластеризация, выявление главных компонент требуют разработки итерационных процедур оптимизации. В задачах развития сети применяются декомпозиционные методы ДО и методы реоптимизации, связанные с изменением параметров существующих элементов сети, с введением новых элементов (вершин, дуг), изменяющих структуру сети, ее топологию, характеристики компонент, связность.

Показано, что наиболее подходящей моделью для таких задач является модель из совокупности ИА, которые образуют многоагентную систему (МАИС). Ставится задача разработки ИА (четких и нечетких), как программного продукта, которая осложняется отсутствием теоретических положений; унифицированной модели, в которой формализуется функционирование и коммуникация ИА в достаточно общей (дискретной, кластерной) среде в условиях неопределенности; программной платформы [4-6].

Список литературы

[1] Козлова М.Г. *Обобщения задачи коммивояжера: знаниеориентированный подход* / М.Г. Козлова, М.С. Германчук // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): матеріали IV Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Полтава, 21-23 берез. 2013р.) / за ред. Ємця О.О. – Полтава: ПУЕТ, 2013. – С. 147-150.

[2] Германчук М.С. *Использование информации в задачах типа многих коммивояжеров* / М.С. Германчук, М.Г. Козлова // XXV Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2014). Тезисы докладов. – Симферополь: ТНУ, 2014. – С. 65.

[3] Донской, В.И. *Интеллектуальное управление: обзор* / В.И. Донской // Таврический вестник информатики и математики / под ред. В.И. Донской. – т. 2. – Симферополь: 2014. – С. 14-35.

[4] Macal C., North M. *Agent-based modeling and simulation for exascale computing.* – SciDAC Review, Summer 2008. – P. 34-41.

[5] International Electro technical Commission (IEC). Technical Committee № 65: Industrial Process Measurement and Control. IEC 1131 – Programmable Controllers Part 7 – Fuzzy Control Programming. – http://www.fuzzytech.com/binaries/ieccd1.pdf

[6] Парасюк И.Н., Ершов С.В. *Моделе-ориентированная архитектура нечетких мультиагентных систем* // Компьютерная математика. – 2010. – №2. – С.62-74.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА И МИРОВОЗЗРЕНИЕ

Кочергин А.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

E-mail: a.kochergin@gmail.com

Это сообщение основано на материалах, подготовленных совместно с И.А. Кострикиным.

Важной составной частью культуры, которая наиболее ярко представлена в математической культуре, является умение четко формулировать утверждения, отличать верные утверждения от неверных, причины от следствий, умение обосновывать утверждения, видеть сходное в различном, противоречия, делать выводы. Более того, для многих выпускников вузов эти навыки могут оказаться важнее, чем «умение считать производные». Изучение теории может существенно влиять на мировоззрение студента.

На экономическом факультете МГУ удалось добиться понимания важности достаточно глубокого изучения теории и получения целостного представления об используемых разделах математических дисциплин. Включение в программу достаточно абстрактного и «неприменмого на практике» материала почти не вызывает вопросов.

Я хочу рассказать о разработанной системе упражнений, контрольных вопросов и контрольных работ, позволивших существенным образом активизировать изучение как теоретического, так и практического материала.

В течение каждого из двух семестров первого курса проводится три контрольные работы (две практических и одна теоретическая) плюс теоретическая экзаменационная работа.

Теоретические работы в первом семестре состоят из двух частей: тестовой и части с развернутым изложением. Тестовые вопросы позволяют отрабатывать быструю реакцию в стандартных ситуациях. Они бывают двух видов: либо определить, какие утверждение верны, либо определить, как связаны между собой два утверждения. Скомпонованы они так, что угадывание затруднено. Конечно, здесь возможен элемент заучивания, но на ряд тех же вопросов требуется ответить с обоснованием во второй, развернутой, части. Кроме того, во второй части требуется доказать теоремы и решить теоретические задачи. Польза тестов состоит еще в том, что в процессе подготовки студенты отвечают на большое количество вопросов, которые средний студент при изучении материала сам себе не задаст. При этом в каждом конкретном случае он должен понимать, что значит — обосновать. Здесь отрабатывается недостающая ныне в школе часть математической культуры.

В связи с неумением выпускников школ формулировать утверждения и, вообще говорить полными фразами, мы вынуждены были дополнительно ввести так называемые микроконтрольные, на которых за 20 минут нужно сформулировать десять определений или теорем из заранее объявленного списка. Следует отметить достаточную эффективность таких работ, хотя (увы) они требуют дополнительных трудозатрат. Эта «мода» достаточно быстро распространилась сначала на другие дисциплины нашей кафедры, а затем и на другие кафедры.

В докладе предполагается продемонстрировать образцы методических материалов и контрольных работ.

Список литературы

[1] А.В. Кочергин, И.А. Кострикин, *Методические материалы по курсу математического анализа* (*интеграл и функции нескольких переменных*), Москва, ТЕИС (2009), 61 с.

[2] А.В. Кочергин, И.А. Кострикин, *Учебно-методическое пособие по курсу математического анализа* (*предел и производная*), Москва, ТЕИС (2011), 99 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ: ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кушнерева Г.И., Сёмкина Е.В.

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)
E-mail: kozirno@gmail.com

В учебно-методическом пособии рассматриваются задачи по одной из важнейших тем математического анализа – двойным интегралам. В пособии разбираются такие подтемы, как вычисление двойного интеграла по прямоугольной области, расстановка пределов интегрирования по произвольной области, изменение порядка интегрирования, замена переменных в двойном интеграле. Внимание уделяется также приложениям двойного интеграла, среди которых вычисление площади плоской фигуры, объём цилиндрического тела, площадь криволинейной поверхности, вычисление массы пластины и координат центра тяжести. По каждой теме пособие содержит необходимый теоретический материал, разобранные стандартные задачи, задачи для самостоятельного решения, а также домашние задания. В силу специфики выбранной темы почти каждый пример иллюстрируется чертежом.

Работа содержит методические разработки и может быть полезна как молодым преподавателям, так и студентам. Материал изложен достаточно подробно, что позволяет использовать пособие для дистанционного обучения.

ИНТЕГРАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ НАУКИ ПО ФОРМИРОВАНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ У СТУДЕНТОВ В ЕДИНОМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Маманазаров А.Б., Маъмуров Б.Б., Мадримов Б., Маманазаров М.А., Ульмасова Г.А.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте (Узбекистан, Ташкент)
E-mail: abduhakim_bazarovich@mail.ru

В последние годы все отчётливее проявляются новые тенденции экономического развития Узбекистана, расширяющие границы сотрудничества с другими странами мира. Сегодня как никогда важно понимать этот новый ресурс исторического времени, видеть новые возможности, которые открывает перед нами педагогическая наука, искать пути решения тех проблем, которые ещё вчера казались неразрешимыми. Время нарастания экономических инноваций в мировой практике даёт нам возможность использовать эффективные подходы, позволяющие одновременно видеть все грани явления и находить пути решения.

Основным стратегическим направлением узбекской модели образования является развитие самостоятельной творческой деятельности участников образовательного процесса, формирование экономической культуры у молодёжи, подготовка будущих специалистов к применению теоретических знаний в практической деятельности и определению своего места в микросоциуме. *Исходя из этого, в настоящее время понятие система образования трактуется как совокупность факторов, обеспечивающих реализацию его социальных функций:* путем реализации образовательных стандартов и их ресурсное обеспечение.

Инновации в образование являются пожалуй, решающим подспорьем технологического прорыва в экономике. Национальная инновационная система как современная институциональная модель является фактором генерации, распространения и использования знаний, их воплощения в новых технологиях и услугах. Инновации в образовании предполагают интеграцию науки и образования, что в процессе обучения позволяет преподнести молодежи самые современные знания. Мы знаем, что наиболее известной на сегодня в теории инноватики является так называемая "Кривая восприятия инноваций Роджерса".

Согласно данной теории, выделяются следующие категории людей:

(1) *инноваторы* — провоцируют изменения;
(2) *ранние последователи* — осторожно пробуют новые идеи;
(3) *раннее большинство* — принимают изменение быстрее, чем обычные люди;

(4) *позднее большинство* — начинают использовать новые идеи тогда, когда они приняты большинством;
(5) *отстающие потребители* — принимают новшества, если они становятся массовыми или даже традиционными.

Интерактивные формы обучения должны обеспечить быстрое восприятие молодежью различных инноваций, в том числе и экономические. Они являются надежным инструментом формирования и развития экономической культуры, так как с их помощью можно приумножить пласт экономических знаний.

Любая интерактивная форма эффективна лишь тогда, когда они исходить из реалий, каковым с позиции нашего выступления является уровень экономической культуры, который весьма дифференцируются в зависимости от множества факторов. При выборе интерактивных форм обучения необходимо учесть сложившейся у молодежи уровень культуры и факторы его определяющее.

В тезисах доклада представлены результаты эмпирического исследования, проведенного в трех регионах республики Узбекистан и нацеленного на выявление особенностей принятия решений студентами в финансовых вопросах. Доказано, что для формирования экономической культуры у обучающейся молодежи необходимо усиление в курсе экономики ее воспитательной части, ориентированной на осознание студентами значимости морально-нравственных аспектов в социальной и в том числе финансовой сфере.

ОБ ИТОГАХ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КАМПАНИИ В КРЫМСКОМ ФЕДЕРАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО В 2016 ГОДУ

Марянин Б.Д., Смирнова С.И.

Таврическая академия Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского
(Россия, Симферополь)

E-mail: marjaninbd@mail.ru, si_smirnova@mail.ru

В 2016 году выпускники крымских школ имели возможность поступать в Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского по результатам вступительных экзаменов. Экзамен по математике был определен как профилирующим для поступающих на факультет математики и информатики Крымской академии КФУ (по специальностям "математика "прикладная математика и информатика"и "прикладная математика"), на специальности "экономика "менеджмент "торговое дело "бизнес-информатика"Института экономики и управления КФУ, на специальность "электротехника и электроэнергетика"Физико-технического института а также на базовые специальности Института строительства и архитектуры КФУ и Института биоресурсов и природопользования КФУ.

Задания на все направления подготовки имели разный уровень сложности, в зависимости от конкурса на специальность. Однако, для всех специальностей формат экзамена был предложен один и тот же. Экзамен проводится в тестовой форме. На экзамен отводится 120 минут. Содержание заданий соответствует действующим учебным программам по математике. Каждый вариант экзаменационной работы состоит из трех частей, различающихся по сложности и форме тестовых заданий.

Для ознакомления абитуриентов со структурой экзаменационного билета до вступительный экзаменов на сайте КФУ был размещен демонстрационный вариант билета по математике, а также схема и критерии его оценивания.

Результаты работы экзаменационной комиссии показали, что такая форма проведения экзамена позволяет объективно оценить знания абитуриентов, выбрать лучших из них.

В докладе разбирается типовой вариант экзаменационного билета вступительного экзамена по математике с анализом типовых ошибок, а также тем школьного курса математики, требующих особого внимания учителей и абитуриентов. Проводится сравнение результатов и заданий вступительных экзаменов по математике на разных направлениях подготовки Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского.

ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИКОВ

Пузанкова Л.В.

Рязанский государственный университет им. Есенина С.А. (Россия, Рязань)
E-mail: your_eluda2001@mail.ru

Выпускники государственных университетов, должны быть готовы к эффективной профессиональной деятельности, необходимой обществу на данном этапе его развития. С этой целью нами был разработан учебный курс "Информационные технологии в математике". Применение новых информационных технологии в учебном процессе открывает ряд новых, недоступных ранее возможностей: красивое оформление материалов, моделирование и демонстрация работы, использование обучающих программ и интернет (интранет) ресурсов и т.д. Весь учебный материал разбит на 3 модуля. Первый модуль посвящен знакомству с информационными технологиями. Второй модуль включает изучение специализированных информационных технологий управления образованием. В третьем - изучаются современные средства оргтехники. На занятиях студенты знакомятся с понятиями технология, информационная технология, систематизируют знания из курса "Информатика учатся использовать интернет и интранет технологии, компьютерную графику, и создают защищенные файлы. После изучения каждого блока студенты проходят тестирование. Тесты, как правило, включают перечень вопросов с вариантами ответов, среди которых находится правильный (один или несколько). Доля правильных ответов определяет итоговую оценку уровня знаний тестируемого по каждому блоку и в целом. Для подготовки к тестированию изданы два учебно-методических пособия "Тестовые задания по информационным и коммуникационным технологиям (с подробными решениями)"[1] и "Тестовые задания по основам информатики (с подробными решениями)"[2]. В пособии приведены более 800 тестовых заданий с подробными решениями, рассмотрев которые любой трудолюбивый студент может подготовиться к тестированию. Таким образом, к концу курса студенты получают общее представление о возможностях информационных технологий, а также практические навыки работы с важными для будущей профессиональной деятельности аппаратными и программными комплексами. Прежде всего, нас волнует качество подготовки студентов. Все лекционные занятия сопровождаются презентациями. Электронные доски позволяют сочетать все преимущества классической презентации с возможностями высоких технологий. Проектор, подключенный к электронной интерактивной доске, позволяет работать в мультимедийной среде, сочетая классический тип презентации с демонстрацией информации из интернета, с видеомагнитофона, с компьютера, флэш-памяти или с видеокамеры. Занятия, проводимые с использованием интерактивных досок и офисной оргтехники, становятся насыщеннее и интереснее, заметно повышая уровень усвоения материала. Организация системы подготовки студентов на основе личностно-ориентированного и синергетического подходов с применением новых информационных технологий создает необходимость по-новому рассмотреть специфику педагогической деятельности в вузе. Подводя итог вышесказанному, следует отметить эффективность применения информационных технологий в процессе подготовки бакалавров.

Список литературы

[?] Пузанкова Л.В., Роговая О.М., Дергачева Ю.Ю. Тестовые задания по информационным и коммуникационным технологиям (с подробными решениями): учебн.-метод. пособие. - Рязань: "Образование Рязани 2012. - 260 с. [?] Пузанкова Л.В., Роговая О.М., Дергачева Ю.Ю. Тестовые задания по основам информатики (с подробными решениями): учебн.-метод. пособие. - Рязань: "Образование Рязани 2012. - 276 с.

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБЛАЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ПОСТОЯННОГО ОБУЧЕНИЯ

Старков П.А.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: starkov.kromsh@gmail.com

Человечество находится на пути к информационной эре. В информационную эпоху информация – основная ценность. Под облачными технологиями подразумеваются два объекта: облачное хранилище данных и облачные вычисления.

Облачное хранилище данных — модель онлайн-хранилища, в котором данные хранятся на серверах в сети, иногда многочисленных серверах распределённых, возможно, на разных континентах. Облачное хранилище может быть собственностью использующей его организации или принадлежать третьей стороне. Доступ к данным осуществляется через различные системы аутентификации с иерархическими правами доступа.

Облачные вычисления — информационно-технологическая концепция, подразумевающая совместно выполнять некоторые распределенные вычисления. Облачная технология обеспечивает повсеместный удобный сетевой доступ по требованию к общему пулу конфигурируемых вычислительных ресурсов. Данная система очень гибкая и, практически неограниченно, расширяемая.

О ПОЛНОТЕ СПИСКА СИЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Субботин В.И.

ЮРГПУ(НПИ) (Россия, Новочеркасск)

E-mail: geometry1@mail.ru

Многогранник, сильно симметричный относительно вращения граней—это такой замкнутый выпуклый многогранник в E^3, через каждую грань которого проходит нетривиальная ось вращения многогранника [1]. Задача состояла в полном перечислении таких многогранников. Интересно, что в полном списке многогранников имеются только семнадцать многогранников, не являющихся комбинаторно эквивалентными равноугольно-полуправильным (архимедовым).

В настоящем сообщении, помимо перечисленных ранее комбинаторно эквивалентных архимедовым, выведен полный список упомянутых семнадцати типов сильно симметричных многогранников:

Теорема 1. *Список многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней, не являющихся комбинаторно эквивалентными равноугольно-полуправильным (архимедовым), исчерпывается следующими типами многоганников:*

1) 1-й полуусечённый ромбический додекаэдр—отсечение всех вершин степени 3 у ромбического додекаэдра,

2) 2-й полуусечённый ромбический додекаэдр—отсечение всех вершин степени 4,

3) усечённый ромбический додекаэдр,

4) 1-й полуусечённый ромботриаконтаэдр—отсечение всех вершин степени 3 у ромботриаконтаэдра,

5) 2-й полуусечённый ромботриаконтаэдр—отсечение всех вершин степени 5,

6) усечённый ромботриаконтаэдр,

7) полуусечённый куб—отсечение четырёх вершин куба (через одну на каждой грани),

8)-12) пять рёберно усечённых правильных (платоновых) многогранников—отсечение всех рёбер,

13)-17) пять рёберно и вершинно усечённых правильных (платоновых) многогранников—отсечение всех рёбер с последующим отсечением вновь образовавшихся вершин.

На рисунке слева изображено локальное строение звезды одной из четырёх треугольных граней полуусечённого куба: треугольная грань соседствует с тремя 6-угольными гранями. В качестве примера многогранников 13)-17) на рисунке справа изображено локальное строение звезды одной из восьми треугольных граней рёберно и вершинно усечённого куба: треугольная грань соседствует с тремя 8-угольными гранями.

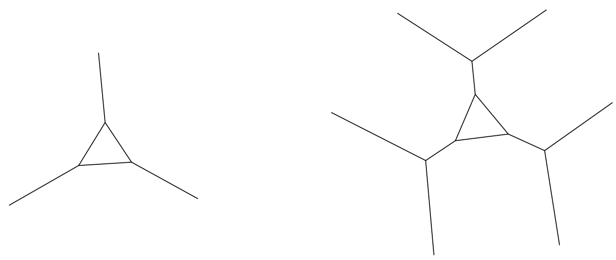

Рис 1

Список литературы

[1] Субботин В.И. *О многогранниках, сильно симметричных относительно вращения*, Чебышевский сборник, 7 (2006), С.168-171 .

О РЕАЛИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ МНОЖЕСТВА СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Шкаликова Н.А.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: nshkalikova@yandex.ru

Рассматриваются плоские схемы из функциональных элементов, являющиеся математической моделью интегральных схем, которые встречаются во многих вычислительных структурах. Плоская схема-это ориентированный граф, в вершинах которого расположены функциональные элементы. Вершины и ребра имеют размеры и толщину. Сложностью схемы называется ее площадь. Точное определение плоской (или клеточной схемы) можно найти в статье [1].

Множество всех симметрических функций от n аргументов обозначим через C. Множество K наборов из нулей и единиц будем называть кодом множества C, если между элементами множеств K и C установлено взаимно однозначное соответствие.

Функцию $F(K, C)$, будем называть универсальной для множества C с кодом K, если множество ее аргументов можно разбить на два подмножества. Аргументы первого из этих подмножеств назовем основными, а аргументы второго — управляющими. Подмножеством, состоящим из основных аргументов, является набор длины n, для которого вычисляется значение симметрической функции. Подмножеством, состоящим из управляющих аргументов, является элемент множества K, соответствующий той симметрической функции, которую требуется реализовать.

Основной результат состоит в следующем.

Площадь схемы с минимальной площадью, реализующей универсальную функцию для системы всех симметрических функций от n переменных, равна по порядку $n \log_2 n$.

Список литературы

[?] Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов //Проблемы кибернетики, 1967. Вып.19. С 274-284.

GRAPHS AND ALGORITHMS IN DIRECT DECOMPOSITION THEORY OF TORSION-FREE ABELIAN GROUPS

Blagoveshchenskaya Ekaterina, Kunetz Dina

Petersburg State Transport University (Russia, Saint-Petersburg)

E-mail: kblag2002@yahoo.com, dk1424@nyu.edu

It is well-known that torsion-free abelian groups admit non-isomorphic decompositions into indecomposable direct summands. Decomposition theory of the so-called block-rigid almost completely decomposable groups with cyclic regulator quotient can be applied to graphical construction of a group from this class with a predicted set of its direct decompositions. The obtained decompositions are classified up to *near isomorphism*, which is an equivalence preserving group direct decomposition properties strictly enough. It is used when the group structures are too complicated to be classified up to the classical isomorphism, see [1].

Definition 1. Let G and H be torsion-free abelian groups of finite rank. Then G and H are called nearly isomorphic (in symbols $G \cong_{nr} H$) if and only if for any prime q there are monomorphisms $\eta_q \ : G \longrightarrow H$ and $\xi_q \ : H \longrightarrow G$ such that $H/\eta_q(G)$ and $G/\xi_q(H)$ are finite groups and $|H/\eta_q(G)|$ and q as well as $|G/\xi_q(H)|$ and q are relatively prime.

The objects under consideration are described as follows, see [2].

Definition 2. An *acd-group* X (almost completely decomposable group) is a torsion-free abelian group of finite rank, that contains a completely decomposable group V such that X/V is a finite group. If in addition X/V is a cyclic group then X is called a *crq-group* (i.e. an acd-group with cyclic regulator quotient).

Without loss of generality we assume that V is the so-called *regulator* of X, that is a distinguished completely decomposable fully invariant subgroup of X denoted by $R(X)$. We restrict ourselves to *block-rigid* crq-groups X of *ring* type, which means the typeset $T_{cr}(X)$ of rank-one summands of V is an antichain and consists only of idempotent types (i.e. the ones which are types of idempotent rational groups, or in other words, can be represented by characteristics, consisting only of $0'$s and ∞'s, see [8, Section 85].

Theorem 1. *Let $n > r \geq 2$ be natural numbers. Then there exists a block-rigid ring type crq-group X of rank n decomposing into direct sums of indecomposable summands of ranks $r_1, r_2, \ldots, r_s$ for any natural $s: \ 1 < s < n$ and all possible partitions $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s$ with $r = r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_s \geq 1$.*

Our graph interpretation of block-rigid crq-groups [4] leads to the r-colorable graph [5] with n vertices (whose edges join vertices of $r = |T_{cr}(X)|$ different colors), which is called the *main r-colorable graph* characterized by the number $(n - r)$ of its isolated vertices. We also introduce the set of the "admissible modifications" of this graph, which differ from the main graph in the set of the connection components representing indecomposable summands of X. Note that these modifications are obtained by special edge shifts, which are invariant concerning the colors of their vertices. Moreover, any two adjacent vertices never share the same color. Then the above theorem proof is equivalent to the proof of the following

Theorem 2. *Let $n > r \geq 2$ be natural numbers. Then there exists a main r-colorable graph Γ with n vertices such that for any natural $s: \ 1 < s < n$ and any possible partition of n into s natural summands $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s$ with $r = r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_s \geq 1$ there exists an admissible modification of Γ leading to the set of connection components $L_1, L_2, \ldots, L_s$ with $r_1, r_2, \ldots, r_s$ vertices accordingly (proof is based on the algorithmic approach).*

References

[1] *A. Mader.* Almost completely decomposable abelian groups, Gordon and Breach, *Algebra, Logic and Applications* Vol. **13**, Amsterdam, 2000.

[2] *E. Blagoveshchenskaya.* Almost Completely Decomposable Abelian Groups and their Endomorphism Rings, *Mathematics in Polytechnical University,* St. Petersburg, 2009.

[3] *L. Fuchs.* Infinite Abelian Groups, vol. 1, 2, Academic Press 1970, 1973.

[4] *E. Blagoveshchenskaya, D. Zuev, D. Kunetz.* Torsion-free abelian groups, graphs and algorithms, Proceedings of International conference "Mathematics and Informatics" , Moscow (2016), 26-28.

[5] *J.A. Bondy and U.S.R. Murty.* Graph theory with applications. Elsevier Science Publishing, 1976.

Секция 9. Теория вероятностей. Случайные процессы. Финансовая математика. Математическая статистика

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОТРАЕКТОРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Асылгареев А.С.

Уфимский государственный авиационный технический университет (Россия, Уфа)
E-mail: asylgareevarthur@gmail.coml

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$d\xi_t = \sigma(t,\xi_t) * dW_t + b(t,\xi_t)dt, \;\; \xi_t|_{t=t_0} = \xi_0. \tag{1}$$

Возмущенное решение ξ_t уравнения (1) с начальным условием $\xi_0 = x_0$ *потраекторно устойчиво*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon,\omega) > 0$ такое, что из неравенства $|x_0| < \delta$ вытекает, что $|\xi_t| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$. Обычно для СДУ рассматривается устойчивость в более слабых смыслах (см [1]).

Пусть задано СДУ вида

$$d\eta_t = t\eta_t * dW_t - a(t)\eta_t dt, \; t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $a(t)$ - непрерывная функция. В работе показывается, что решение уравнения (2) потраекторно устойчиво при $a(t) = t^{\frac{1}{2}+\alpha}$, где $\alpha \geqslant 0$.

Использованный в работе метод заключается в сравнении решения СДУ, свойство устойчивости которого требуется установить, с потраекторно устойчивым решением уравнения (2).

Теорема. *Пусть ξ_t – возмущенное решение уравнения* (1)*, а η_t – потраекторно устойчивое возмущенное неотрицательное решение уравнения* (2)*, и ξ_t представима в виде функции от η_t, причём для всех $t \geqslant 0$ справедливо следующее условие:*

$$\sup_{|u|\leqslant\delta, t\geq 0} \left| \frac{1}{tu}\sigma\left(t, \phi\left(t, \frac{1}{t}\left(\ln(|u|) - \ln(|\eta_0|) + \int\limits_0^t (a(s) + W(s))\, ds\right)\right)\right)\right| \leqslant K,$$

где K – некоторая положительная константа. Тогда возмущенное решение уравнения (1) *потраекторно устойчиво.*

Автор выражает глубокую благодарность проф. Насырову Ф.С. за ценные замечания, существенным образом способствовавшие развитию и улучшению данной работы.

Список литературы

[1] Хасьминский Р. З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, М.:Наука, 1969.

ВЕРООЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Белопольская Я.И.

Санкт-Петербургский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Россия)
E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Системы нелинейных параболических уравнений второго порядка возникают в различных задачах математической физики, биологии, биохимии, а также в социологии и экономике. Вероятностная интерпретация таких систем позволяет глубже понять природу явлений, описываемых этими системами, а также построить эффективные методы построения численных решений соответствующих краевых задач. В докладе обсуждается вероятностная интерпретация решения задачи Коши для двух классов систем систем нелинейных параболических уравнений.

Первый класс - это системы с диагональным вхождением членов старшего порядка. Для них построены соответствующие вероятностные представления классических решений задачи Коши как прямой (с условиями Коши заданными на левом конце временного интервала), так и для обратной (с условиями Коши заданными на правом конце временного интервала). Наряду с этим будут построены вероятностные представления вязкостных и обобщенных решений рассматриваемых задач. Соответствующие результаты для классических решений были получены в [1]. Построение вероятностных представлений вязкостных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений обобщает результаты теории обратных стохастических дифференциальных уравнений Парду-Пенга [2], а построение вероятностных представлений обобщенных решений таких систем обобщает результаты теории стохастических потоков Куниты [3]. Соответствующие результаты были получены в работах [4]-[6].

Второй класс - это системы с недиагональным вхождением членов старшего порядка, называемые системами с кросс-диффузией. Для этого класса нелинейных параболических систем построено вероятностное представление регулярного обобщенного решения прямой задачи Коши. При этом важную роль играет введение стохастических тестовых функций, обобщающих появившееся ранее в работе [7] понятие стохастической тестовой функции для скалярного случая. Соответствующие результаты были получены в работах [8]-[9].

Работа поддержана грантом РФФИ 15-01-01453.

Список литературы

[1] Belopolskaya Ya., DaleckyYu.,Stochastic equations and differential geometry. Kluwer Academic Publishers. 1990.

[2] Pardoux, E. and Peng, S. Adapted Solutions of Backward stochastic differential equation, Systems and Control Letters, 14, (1990) 55-61.

[3] H. Kunita H. Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. Ecole d?et?e de Probabilit?e de Saint-Flour, Lect. Notes Math., 1097, (1982) 143-303.

[4] Belopolskaya Ya., Woyczynski W., Generalized solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes, Stochastics and dynamics, v 11, N 1 (2012) 1-31.

[5] Белопольская Я. И., Прямые - обратные стохастические уравнения, связанные с системами квазилинейных параболических уравнений и теоремы сравнения Записки научн сем. ПОМИ 412 * "Вероятность и статистика. 19"(2013) 15-46.

[6] Belopolskaya Ya., Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems Modern Stochastics and Applications - Springer Optimization and Its Applications 90 (2014).

[7] Matoussi A., Xu M. Sobolev solution for semilinear PDE with obstacle under monotonicity condition 13 Paper no. 35, (2008), 1035–1067. ??

[8] Belopolskaya, Ya. *Probabilistic Model for the Lotka-Volterra System with Cross-Diffusion* J. Math. Sci. 214, 4, (2016) 425-442.

[9] Белопольская Я.И. *Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией* ТВиП v 61 N2 (2016)1-33.

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Григорьева А.О.

СПбГАСУ(Россия, Санкт-Петербург)

E-mail: asya_grigor@mail.ru

В классе систем нелинейных параболических уравнений второго порядка можно выделить следующие подсистемы - 1) системы с диагональным вхождением одинаковых членов, содержащих вторые производные и недиагональным вхождением членов первого и нулевого порядка и 2) системы с диагональным вхождением членов первого и второго порядка и недиагональным вхождением членов нулевого порядка. Вероятностный подход к построению различных классов решений задачи Коши для этих систем развит в работах Я.И.Белопольской (см [1] и приведенные там ссылки). В докладе будет построено вероятностное представление решения задачи Коши для подсистемы 2) и на его основе развит численный алгоритм построения приближенного решения рассматриваемой задачи. Для простоты мы ограничимся семилинейной системой.

Рассмотрим задачу Коши для семилинейной параболической системы вида:

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2} Tr A_l^*(x,u) \bigtriangledown^2 u_l A_l(x,u) + < a_l(x,u), \bigtriangledown u_l > + \sum_{m \neq l=1}^{M} c_{lm} u_m = 0, \quad (1)$$

$$u_l(T,x) = u_{0l}(x), l = 1..M,$$

где $a_l(x,u) = a(x,u,l),\ A_l(x,u) = A(x,u,l), x \in R^d, u \in R^M, l = 1, \dots M$.

Чтобы построить вероятностное представление решения задачи (1), рассмотрим стохастические уравнения

$$d\xi(\theta) = a^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))d\theta + A^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))dw(\theta), \xi(s) = x, x \in R^d, \tag{2}$$

$$\gamma(t) = l + \int_s^t \int_V zN(dt,dz), \gamma(s) = l, l \in V = 1,..,M \tag{3}$$

где $w(t) \in R^d$ - это винеровский процесс, $N(dt,dz)$ - пуассоновская случайная мера,а $\gamma(t)$-марковская цепь с непрерывным временем и переходной вероятностью $P(\gamma(t+\triangle t) = j|\gamma(t) = i, \xi(s), \gamma(s), s \leq t) = c_{ij}(\xi(t)) \triangle t + o(\triangle t), i \neq j, p_{ij} \geq 0, \sum_j p_{ij} = 1$

Если классическое решение задачи (1) существует, то его вероятностное представление имеет вид:

$$u_l(s,x) = u(s,x,l) = E[\eta_{s,l}(T)u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,l}(T))], \tag{4}$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\gamma(t)$ удовлетворяют (2)-(4) соответственно.

Марковский процесс γ меняется в случайный момент времени τ_{ij} и $P(\tau_{ij} \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{c_{ij}t}, i \neq j \\ 0, i - j \end{cases}$. Случайные величины (с.в.) τ_{ij} будем симулировать с помощью равномерной с.в. U, $U \in [0,1]$ по формуле $\tau_{ij} = -\frac{1}{c_{ij}} lnU$.

Введем дискретизацию по времени и положим $t_{k+1} - t_k = \frac{T}{n} = \Delta_k t$. Пусть ε_k - независимые с.в. с распределением $N(0,1)$. Воспользовавшись методом последовательных приближений и схемой Эйлера, построим приближенное решение системы (1) с помощью соотношений $u^0(s,x,l) = u_0(x,l), \xi^q_{t_k,x}(t) \approx \bar{\xi}^q_{t_k,x}(t_{k+1}) = x + a^{u_q}(x,l)\Delta_k t + A^{u_q}(x,l)\varepsilon_k\sqrt{\Delta_k t}, q = 1,2,...$

$$\gamma(t_k) = l, min_m \tau_{lm} > t_k \gamma(t_k) = m^*, \text{ если } min_m \tau_{lm} = \tau_{lm^*}, t_k < \tau_{lm^*} \leq t_{k+1}$$

$$\xi^q_{t_k,x}(t) \approx \bar{\xi}^q_{t_k,x}(t) = x + a^{u_q}(x,m^*)\Delta_k t + A^{u_q}(x,m^*)\varepsilon_k\sqrt{\Delta_k t},$$
$$u^{q+1}(t_k,x,l) = E[u_0(\xi^q(t_{k+1}), \gamma(t_{k+1}))|\xi^q(t_k) = x, \gamma(t_k) = l].$$

Полученная система сходится при $q \to \infty, n \to \infty$ и для того, чтобы на каждом шаге получить ошибку не больше $[\Delta t]^{1+\alpha}, \alpha \in (0,1)$ достаточно воспользоваться одной итерацией $q = 1$. Работа поддержана грантом РФФИ 15-0101453.

Список литературы

[1] Белопольская Я. И. *Прямые-обратные стохастические уравнения, связанные с системами квазилинейных параболических уравнений и теоремы сравнения* "Записки научных семинаров ПОМИ"т. 412 15-45.

ОДИН ВАРИАНТ ЗАДАЧИ О ПОРТФЕЛЕ

Задорожний В.Г.

Воронежский госуниверситет (Россия, Воронеж)

E-mail: zador@amm.vsu.ru

Пусть $x_1(t), x_2(t)$ - стоимости ценных бумаг в момент времени t, которые изменяются согласно уравнениям $\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon_k(t,\omega)x_k, k = 1,2$ где $\varepsilon_k(t,\omega)$ - случайные процессы, заданные характеристическим функционалом

$$\psi(u_1,u_2) = \exp(i\int_0^1 \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k(s,\omega)u_k(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=1}^2 b_{kk}(s_1,s_2)u_k(s_1)u_k(s_2)ds_1ds_2 -$$

$$\int_0^1\int_0^1 b_{12}(s_1,s_2)u_1(s_1)u_2(s_2)ds_1ds_2).$$

Требуется найти $x_1(0) \geq 0, x_2(0) \geq 0$, при которых математическое ожидание $Mx_1(1) + Mx_2(1)$ принимает наибольшее значение и при этом выполняются условия: $x_1(0) + x_2(0) = 1$ и риск (дисперсия случайной величины $x_1(1) + x_2(1)$) не превосходил заданную величину r.

Определим функцию $\chi(\tau)=\chi(s,t,\tau)=sign(\tau-s)$ при $\tau\in[min(s,t),max(s,t)]$ и равно нулю в противном случае.Введем обозначения:

$$A=\psi(-2i\chi(0,1),0)-\psi^2(-i\chi(0,1),0)+\psi(0,-2i\chi(0,1))-\psi^2(0,-i\chi(0,1))-$$
$$-4\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1))+4\psi(-i\chi(0,1),0)\psi(0,-i\chi(0,1)),$$
$$B=\psi(0,-2i\chi(0,1))-\psi^2(0,-i\chi(0,1))+\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1))-$$
$$-\psi(-i\chi(0,1),0)\psi(0,-i\chi(0,1)),$$
$$C=\psi(0,-2i\chi(0,1))-\psi^2(0,-i\chi(0,1)).$$

Пусть задан риск $r>0$ тогда:

1. $x_1(0)=1, x_2(0)=0$ при выполнении условий $\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))>0, A-2B+C<r$.

2.$x_1(0)=0, x_2(0)=1$ при выполнении условий $\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))\le 0, C\le r$.

3. Если не выполняются условия 1,2, то при $A>0$ число $x_1(0)$ равно большему из чисел $\frac{B\pm(B^2-A(C-r))^{0,5}}{A}$, лежащему в интервале (0,1), а при $A<0$ число $x_1(0)$ равно меньшему из чисел $\frac{B\pm(B^2-A(C-r))^{0,5}}{A}$, лежащему в интервале (0,1).

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ИХ ОПИСАНИЮ

Залыгаева М.Е.

Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)

E-mail: zalygaeva@math.vsu.ru

В работах [1, 2] было предложено описание (в рамках лагранжева подхода) движения вязких жидкостей с использованием стохастических процессов, у которых условное математическое ожидание есть поток вязкой несжимаемой жидкости. В [3] подробно описано, как некоторое стохастическое возмущение потока идеальной несжимаемой жидкости под действием внешних сил на плоском n-мерном торе приводит к возникновению в касательном пространстве в единице группы диффеоморфизмов, сохраняющих объем, решения уравнения Навье-Стокса. При отсутствии внешних сил – к решению уравнения Рейнольдса. Для потока диффузионной материи – к решению уравнения Бюргерса.

Далее в работе [4] данные результаты были обобщены на случай жидкости с вязким членом $B(t)w(t)$, где $B(t)$ – некоторый стационарный линейный оператор, $w(t)$ – винеровский процесс. Там же доказано, что при переходе к эйлерову описанию в данном случае возникают аналоги уравнений Бюргерса, Рейнольдса и Навье-Стокса, в которых вместо оператора Лапласа присутствует дифференциальный оператор второго порядка с матрицей следующего вида: матрица оператора $B(t)$, умноженная на транспонированную матрицу оператора $B(t)$.

В настоящей работе вышеприведенные результаты применяются к конкретным моделям жидкостей: Фойгта и Кельвина-Фойгта.

Список литературы

[1] Yu. E. Gliklikh, *Ordinary and Stochastic Di®erential Geometry as a Tool for Mathemat- ical Physics*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[2] Yu. E. Gliklikh, *Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods*, Springer-Verlag, N.Y., 1997

[3] Gliklikh Yu. E., *Solutions of Burgers, Reynolds and Navier-Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2010.– №1(2010).–P.15-29

[4] Gliklikh Yu.E., Zalygaeva M.E., *Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms*, Applicable Analysis.- 2015.- V. 94.- No. 6.- P. 1116-1127

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ ОПТИМИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

Красий Н.П.

Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)

E-mail: krasnad@yandex.ru

В последнее время в рамках одного из направлений научной тематики кафедры высшей математики АСА ДГТУ проводятся исследования возможности оптимизации квазилинейных моделей, описывающих взаимодействие в единой системе различных конкурирующих структур с учётом случайной расстановки приоритетов сторонним лицом – арбитром, принимающим решения на основании экспертных рекомендаций (см., например,[1]).

Представляемая в настоящем докладе модель предполагает, что в системе фигурируют две структуры, а приоритеты $\alpha_i = \alpha_i(\omega),\ i = 1,2$ – произвольные независимые случайные величины, принимающие значения на отрезке $[0,1]$ каждая, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

В работе [2] были выявлены условия существования глобального максимума функции $F(x) = E\left(F_1^{\alpha_1}\right) E\left(F_2^{\alpha_2}\right)$, отражающей целевую функцию арбитра, где $F_1(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right) I_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b > 0\right\}}$ и $F_2(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i + d\right) I_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i + d > 0\right\}}$:

(1) существует такое число $c > 0$, что $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполняются равенства $c_i = c a_i$;

(2) $-b < \dfrac{d}{c}$;

(3) $P(0 < \alpha_i < 1) > 0$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим ситуации, когда распределения случайных величин имеют специфический характер и условие (3) не выполняется.

Случай 1. Пусть выполняются условия (1) и (2), а условие (3) не выполняется. Обозначим $q_i = P(\alpha_i = 0) > 0$, $p_i = P(\alpha_i = 1) > 0$, где $p_i + q_i = 1$, $i = 1, 2$. В этом случае

$$F(t) = -cp_1p_2t^2 + \left[(d - bc)p_1p_2 + p_1q_2 - cq_1p_2\right] t + (bp_1 + q_1)(dp_2 + q_2),$$

где $t = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \left(-b < t < \dfrac{d}{c}\right)$. Таким образом, график этой функции – парабола с ветвями, направленными вниз, имеющая две точки пересечения с осью абсцисс. Её точкой глобального максимума t^* является вершина параболы, а все точки гиперплоскости $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = t^*$ являются точками глобального максимума функции $F(x)$.

Случай 2. Пусть выполняются условия (1) и (2), а условие (3) выполнено только для одного из приоритетов, например, для α_2 . Тогда наличие глобального максимума функции зависит от знака числа a:

$$a = p_1 P(\alpha_2 = 0) + (d - b + 2cb)p_1 P(\alpha_2 = 1) - cq_1 P(\alpha_2 = 1) - cE\left(\alpha_2 (cb + d)^{\alpha_2 - 1} I_{\{\alpha_1 = 0\} \cap \{0 < \alpha_2 < 1\}}\right)$$
$$+ E\left((cb + d)^{\alpha_2} I_{\{\alpha_1 = 1\} \cap \{0 < \alpha_2 < 1\}}\right).$$

Исследования показали, что число a может принимать как положительные, так и отрицательные значения, и если $a \geq 0$, то в результате имеем единственную точку максимума t^* и все точки гиперплоскости $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = t^*$ являются точками глобального максимума целевой функции, а в случае, когда $a < 0$, точек глобального максимума у функции $F(x)$ нет.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184а).

Список литературы

[1] Вагин В.С., Павлов И.В., *Моделирование и оптимизация квазилинейных сложных систем с учетом вероятностного характера приоритетов*, Вестник РГУПС, 2016, №1(61), с. 135–139.

[2] Красий Н.П., *Оптимизация квазилинейных моделей с независимыми приоритетами.* Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI, Ростов-на-Дону,24-29 апреля 2016 г., материалы конференции, с. 134-135.

О РАЗРЕШИМОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ТЕКУЩИМИ СКОРОСТЯМИ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Макарова А.В.

ВУНЦ ВВС "ВВА"имени Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (Россия, Воронеж)

E-mail: allagm@.mail.ru

Текущая скорость – это симметрическая производная в среднем случайного процесса. Она является естественным аналогом обычной физической скорости детерминированной кривой. Осмотические скорости показывают как быстро изменяется "случайность"процесса. Производная справа дает информацию о сносе случайного процесса. Все эти понятия были введены Э.Нельсоном в 60–е годы XX века. В работах С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха (см. например [1], [3], [2]), построена дополнительно так называемая квадратичная производная в среднем, связанная с коэффициентом диффузии, что позволило корректно поставить задачу о нахождении процесса по его производным в среднем.

В работах С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха [1, 2] было показано, что если заданы текущая скорость и квадратичная производная в среднем (дающая информацию о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную. Если заданы многозначная текущая скорость и квадратичная производная, то уравнение превращается во включение.

Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ – многозначное векторное поле, $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ – многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in \mathbf{v}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{1}$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка, более подробно в ([2], [1]). Понятие решение включения (1) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в работе [1],

Предполагаем, что для некоторой последовательности положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ существуют гладкие ε_k-аппроксимации поля $\mathbf{v}$, у которых первые частные производные равномерно ограничены одной и той же константой. Непрерывность, полунепрерывность поля $\mathbf{v}$ сверху или снизу не предполагается.

Мы накладываем на $\mathbf{v}(t,m)$ следующие условия:

Условие 1. Многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathbb{T}^n$ автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы. Существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что для любого ε_k поле $\mathbf{v}(m)$ имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_i(m)$ и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\frac{\partial v_i}{\partial m_j}$.

Условие 2. (i) Многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathcal{T}^n$ принимает значения в $S_{LC}(n)$; оно автономно и полунепрерывно сверху.

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ замкнуты и равномерно ограничены.

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ множество $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{T}_-(n)$ и множество $\mathsf{L}_\mathsf{C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{L}_0(n)$.

Теорема 1. *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t,m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *удовлетворяет Условию 1, а многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет Условию 2. Рассмотрим случайный элемент* ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого распределение относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$*, где* ρ_0 *гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *включение* (1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0,T]$.

Список литературы

[1] Azarina S.V. Differential inclusions with mean derivatives / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh // Dynamic Sysytems and Applications 16, No. 1 (2007), pp. 49–72

[2] Azarina S.V. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software.- 2015.- Vol. 8.- No. 4.- P. 100 – 106.

[3] Azarina S.V. Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh, A.V. Obukhovskii // Applicable Analysis, 86, No. 9 (2007), pp. 1105–1116

ДОСТАТОЧНЫЕ СТАТИСТИКИ В ТЕОРЕМЕ де ФИНЕТТИ

Мелкумова Л.Э., Шатских С.Я.

ООО «Меркури Девелопмент Раша», Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (Россия, Самара)

E-mail: lana.melkumova@gmail.com, s.shatskikh@inbox.ru

В пространстве $\mathbb{R}^\infty = \{\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n, \ldots)\}$ с борелевской $\sigma-$алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ рассматривается последовательность "координатных" случайных величин $e_k(\boldsymbol{z}) = z_k$, $(k = 1, 2, \ldots)$, для которых определены семейства вероятностных мер $\nu_y\{\cdot\}$ и $\mu_g\{\cdot\}$

$$\nu_y\{e_1(\boldsymbol{z}) \le x_1, \ldots, e_n(\boldsymbol{z}) \le x_n\} = \prod_{k=1}^{n} F(x_k|y), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$$\mu_g\{e_1(\boldsymbol{z}) \le x_1, \ldots, e_n(\boldsymbol{z}) \le x_n\} = \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n} F(x_k|y) g(y) dy, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

где $F(x|y)$ - условная функция распределения с плотностью $f(x|y)$ и $g(y)$ - положительная на полуоси $[0, +\infty)$ плотность вероятностей.

Для любого n случайные величины

$$e_1(\boldsymbol{z}), \ldots, e_n(\boldsymbol{z}) \tag{2}$$

обладают свойством перестановочности относительно меры $\mu_g\{\cdot\}$. В связи с этим см. теорему де Финетти ([1], стр. 210, [2]). Последовательность случайных величин (2) можно считать случайной выборкой с законом распределения $F(x|y)$, рассматривая $y \in [0, \infty)$ в качестве неизвестного параметра.

По выборке (2), используя функцию правдоподобия (1), найдем решение уравнение максимального правдоподобия (УМП), как оценку параметра y. В общем случае для выборки (2) для каждого натурального n УМП может иметь много корней, а функции правдоподобия много (локальных) максимумов. Однако при выполнении "условий регулярности" Г. Крамера существует последовательность корней УМП, которая является сильно состоятельной оценкой неизвестного параметра $y \in [0, \infty)$ ([3], p. 119-123).

Обозначим элементы этой последовательности корней УМП через $\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{z})$: итак для любого $y \in (0, +\infty)$ при $n \to \infty$ мера множества сходимости $\nu_y\{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{z}) \longrightarrow y\} = 1$.

Если УМП для каждого n имеет единственный корень во внутренней точке полуоси $[0, \infty)$, то последовательность этих корней $\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{z})$, являются оценками максимального правдоподобия (глобальными максимумами) параметра $y \in (0, \infty)$.

Теорема. Для последовательности (2) существует $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)-$измеримая случайная величина $\mathbf{s}^*(\boldsymbol{z})$ такая, что при $n \to \infty$

1. $\mu_g\{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{z}) \longrightarrow \mathbf{s}^*(\boldsymbol{z})\} = 1$,

2. статистика $\mathbf{s}^*(\boldsymbol{z})$ является достаточной статистикой для семейства вероятностных мер $\mu_g\{\cdot\}$, индексированных функциями $g(\cdot)$, т.е. мера $\mu_g\{A|\mathbf{s}^*(\boldsymbol{z}) = y\}$ не зависит от $g\{\cdot\}$ для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Список литературы

[1] Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. Мир, М.: 1971.

[2] Кнутова Е.М., Шатских С.Я. Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений. - Теория вероятн. и её примен., 2006, т. 52. в. 2, Наука, М, с. 374 - 382.

[3] Ferguson Th. A Course in Large Sample Theory. Springer. 1996.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184 А).

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ

Немченко Е.И.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (Россия, Санкт-Петербург)

E-mail: nemchenko_ekaterina@mail.ru

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}Tr[A^*(x,u)\nabla^2 u A(x,u)] + \langle a(x,u,\nabla u), \nabla u\rangle + g(x,u,\nabla u) = 0, \quad u(T,x) = u_0(x), \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R^d$, $u(t,x) \in R^1$, $A(x,u) \in R^d \otimes R^d$, $a(x,u,\nabla u) \in R^d$, $Tr[A^*\nabla^2 uA] = \sum_{i,j,k=1}^d A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}A_{lk}$, $\langle a, \nabla u\rangle = \sum_{k=1}^d a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$, $g(x,u,\nabla u) \in R^1$.

Существует, по крайней мере, два вероятностных подхода к построению решений задачи (1) (см. [1], [2]). Опираясь на эти подходы, можно построить два вероятностных представления решения этой задачи и построить на их основе численные алгоритмы построения классического и вязкостного решений задачи Коши (1). Мы предполагаем, что $u_0 \in C^2(R^d)$, коэффициенты коэффициенты a, A и функция g дважды дифференцируемы по всем аргументам, сублинейны по x и полилинейны по u и ∇u.

Пусть $w(t) \in R^d$ – это стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Из результатов [1] следует, что стохастическая задача, ассоциированная с задачей Коши, (1) имеет вид

$$d\xi(\theta) = a(\xi(\theta), U(\theta, \xi(\theta)))d\theta + A(\xi(\theta), u(\theta, \xi(\theta)))dw(\theta), \quad \xi(t) = x, \tag{2}$$

$$d\eta(\theta) = \alpha^*(\xi(\theta), U(\theta,\xi(\theta)))\eta(\theta)d\theta + \beta^*(\xi(\theta), U(\theta,\xi(\theta)))(\eta(\theta), dw(\theta)), \quad \eta(t) = h, \tag{3}$$

$$\langle h, U(t,x)\rangle = \mathbf{E}\left[\langle \eta_{t,h}(T), U_0(\xi_{t,x}(T))\rangle + \int_t^T \langle \eta_{t,h}(\theta), G(\xi(\theta), U(\theta,\xi(\theta)))\rangle d\theta\right]. \tag{4}$$

Здесь $U = (u,v)$, $v = \nabla u$, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nabla_u av + \nabla_u g \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x A + \nabla_u Av + \nabla_v av + \nabla_v g \end{pmatrix}$, а $G = \begin{pmatrix} g \\ \nabla_x g + \nabla_x av \end{pmatrix}$. При этом вектор-функция U удовлетворяет семилинейной системе, называемой дифференциальным продолжением системы (1).

Альтернативный подход [2] заключается в построении системы прямого и обратного стохастического уравнения

$$d\xi(\theta) = a(\xi(\theta), y(\theta), z(\theta))d\theta + A(\xi(\theta), y(\theta))dw(\theta), \quad \xi(t) = x, \tag{5}$$

$$dy(\theta) = -g(\xi(\theta), y(\theta), z(\theta))d\theta + z(\theta)dw(\theta), \quad y(T) = u_0(\xi(T)), \quad 0 \le t \le \theta \le T, \tag{6}$$

ассоциированной с задачей (1) в том смысле, что $y(s) = u(s,x)$ является вязкостным решением задачи (1). Здесь $y(\theta) = u(\theta, \xi(\theta))$, $z(t) = A(\xi(\theta), y(\theta))\nabla u(\theta, \xi(\theta))$.

На основе представлений (4) и (6) разработаны и реализованы алгоритмы численного построения классического и вязкостного решения задачи (1) соответственно, обобщающие результаты работ [3] и [4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-01-01453.

Список литературы

[1] Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky, *Investigation of the Cauchy problem with quasilinear systems with finite and infinite number of arguments by means of Markov random processes*, Izv. VUZ Mathematics №12 (1978), 5-17.

[2] E. Pardoux, S. Peng, *Backward Stochastic Differential Equations and Quasilinear Parabolic Partial Differential Equations*, Lecture Notes in CIS 176 (1992), 200-217.

[3] G.Milstein, *The Probability Approach to Numerical Solution of Nonlinear Parabolic Equations*,Numerical Methods for Partial Differential Equations 18(4) (2002), 490-522.

[4] S. Peng, M. Xu, *Numerical algorithms for backward stochastic differential equations with 1-d Brownian motion: Convergence and simulations*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 45(2) (2011), 335-360.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ДЕФОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУРАХ

Павлов И.В.

Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)

E-mail: pavloviv2005@mail.ru

В настоящем докладе дается обзор основных понятий и результатов стохастического анализа на так называемых деформированных стохастических базисах. Мотивировка данных исследований такова. Довольно часто возникает необходимость в изучении работы финансовой, информационной, транспортной или какой-либо другой системы, в которую вмешивается некоторый плохо предсказуемый фактор (экономический кризис, перегрузка сети в информационной системе, периодические задержки поездов в системе железнодорожного транспорта и т.д.). Основная идея: моделировать процессы функционирования системы в указанный период при условии, что на каждом (возможно, достаточно коротком) участке времени действует своя вероятность возникновения различных событий. Вероятностные меры $Q^{(n)}$, определенные на сигма-алгебрах $\mathcal{F}_n$, образующих возрастающий информационный поток, математически реализуют данную идею. Совокупность $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ таких мер и названа деформацией. Аксиомы, накладываемые на вероятности $Q^{(n)}$, деформации 1-го и 2-го рода, а также основные свойства деформированного стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ подробно изучены в статье [1]. В докладе будет приведена дополнительная информация, связанная с этим основополагающим аспектом. В частности, речь пойдет о различных преобразованиях деформированных стохастических базисов и основах теории моментов остановки на этих базисах (в случае деформаций 1-го рода ряд результатов о моментах остановки содержится в [2]).

Изложение элементов теории деформированных мартингалов и производных от них процессов, а также метода интерполирования с помощью деформированных мартингальных мер будет следовать, в основном, работе [3].

Переход к непрерывному времени (для деформаций 2-го рода) осуществлен в [4]. В докладе будет приведен ряд результатов о деформированных мартингалах с непрерывным временем.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184а).

Список литературы

[1] Назарько О.В., Павлов И.В., Чернов А.В. *Деформации и деформированные стохастические базисы.* В сб.: «Математические методы в современных и классических моделях экономики и естествознания: материалы региональной научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава и молодых ученых РГЭУ (РИНХ)». – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный экономический университет (РИНХ), 2012, с. 37–53.

[2] Pavlov I.V., Nazarko O.V. *Characterization of density processes of deformed stochastic bases of the first kind.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2014, vol. 287, pp. 256–267.

[3] Pavlov I.V. *Some Processes and Models on Deformed Stochastic Bases.* Proceedings of the 2$^{\text{nd}}$ International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO 16), Ilia Frenkel and Anatoly Lisnianski (eds.).—Beer Sheva, Israel: IEEE, 978-1-4673-9941-8/16, DOI 10.1109/SMRLO.2016.75., 2016.—pp. 432–437.

[4] Павлов И.В., Назарько О.В. *Теоремы о деформированных мартингалах: разложение Рисса, характеризация локальных мартингалов, вычисление квадратичных характеристик.* Известия ВУЗов, Северо-Кавказский регион, Естественные науки, 2015, № 1, с. 36—42.

АСИМПТОТИКА МАКСИМУМА В ТРЕУГОЛЬНОЙ СХЕМЕ СИЛЬНО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Савинов Е.А.

Самарский Университет (Россия, Самара)

E-mail: henrylee@dxdy.ru

Рассматривается схема серий случайных векторов, имеющих t-распределения Стьюдента. Для максимума сильно зависимых гауссовских случайных величин, полученных в результате преобразования перекрестной независимости указанных векторов, установлены условия сходимости к свертке распределения Гумбеля с нормальным. Результаты являются продолжением опубликованных в работе [1]. При доказательстве также использовалась техника, описанная, в частности, в [2].

Предположим, на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ задана мера Стьюдента μ как масштабная смесь гауссовских мер, определяемая положительным ядерным оператором B и смешивающим обратным гамма-распределением. А именно, характеристический функционал меры μ имеет следующий вид

$$\Psi_\mu(y) = \int\limits_0^\infty \exp\left\{ -\frac{t}{2}\langle By, y\rangle \right\} g_r(t)\, dt, \qquad y \in H,$$

где

$$g_r(t) = \frac{r^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} t^{-r/2-1} \exp\left\{ -\frac{r}{2t} \right\}, \qquad t > 0.$$

Рассмотрим конечномерные проекции $F(x_1, \dots, x_n)$ меры μ на произвольный отонормированный базис $\{f_k\}$ и соответствующие условные функции распределения $F_{i|1\dots\hat{\imath}\dots n}(x_i|x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$.

Обозначим Φ и φ, соответственно функцию и плотность $(0,1)$-гауссовского распределения. Введем семейство случайных величин

$$X^*_{i,n} = \Phi^{-1}\left(F_{i|1\dots\hat{\imath}\dots n}(X_i|X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n) \right),$$

где $X_i = \langle\,\cdot\,, f_i\rangle$, Обозначим $B_n = \pi_n B \pi_n$, где π_n ортопроектор $\mathbb{H} \to \mathbb{H}_n = span\{f_1, \dots, f_n\}$, $\alpha_n = (2\ln n)^{1/2}$, $\beta_n = (2\ln n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\ln n)^{-1/2}(\ln\ln n + \ln 4\pi)$,
$c_{i,j,n} = \langle B_n^{-1} f_i, f_j\rangle \,/\, \left[\langle B_n^{-1} f_i, f_i\rangle \langle B_n^{-1} f_j, f_j\rangle\right]^{1/2}$.

Теорема. *Если для заданного* $\gamma > 0$ *базис* $\{f_k\}$ *такой, что* $\delta := \limsup\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i\neq j} |c_{i,j,n}| < 1$, *и существует* $\alpha \in \left(0, \frac{1-\delta}{1+\delta}\right)$, *для которого* $\max\limits_{n^\alpha < j-i < n} |c_{i,j,n} \ln(j-i) - \gamma| \to 0$, $\quad n \to \infty$, *то для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\mu\left\{ \alpha_n \left(\max_{1\le i\le n} X^*_{i,n} - \beta_n \right) \le x \right\} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z} \right\} \varphi(z)\, dz, \quad n \to \infty.$$

Список литературы

[1] Савинов Е.А. *Предельная теорема для максимума случайных величин, связанных IT-копулами t-распределения Стьюдента*, Теория вероятн. и ее примен., 59 (2014), с. 594–602.

[2] М. Лидбеттер, Г. Линдгрен, Х. Ротсен. *Экстремумы случайных последовательностей и процессов* М. Мир, 1989.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ И РАЗЛИЧНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

Углич С.И.

Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)

E-mail: uglitch@inbox.ru

Работа выполнена в рамках научной тематики кафедры высшей математики АСА ДГТУ. Исследуются возможности оптимизации квазилинейных моделей, описывающих взаимодействие в единой системе различных конкурирующих структур с учётом случайной расстановки приоритетов сторонним лицом – арбитром, принимающим решения на основании экспертных рекомендаций (см., например,[1] - [3]).

Представляемая в настоящем докладе модель предполагает, что в системе фигурируют две структуры, а приоритеты $\alpha_i = \alpha_i(\omega)$, $i = 1, 2$ – произвольные случайные величины, принимающие значения на отрезке $[0, 1]$ каждая, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. После некоторых преобразований задача сводится к исследованию поведения функции $F(x)$. Рассматриваются различные виды функции $F(x)$.

1) $F(x) = (b+x)^\alpha(-cx+d)^\beta, \alpha+\beta = 1$ здесь α – случайная величина.

2) $F(x) = \int_0^1 (b+x)^y f_1(y) dy \int_0^1 (-cx+d)^y f_2(y) dy$

Здесь $f_1(y), f_2(y)$ плотности распределения, b, c, d -параметры задачи. Функции распределения можно задавать произвольно, в частности рассматривались степенные функции.

$$f_1(y) = (n+1)y^n, f_2(y) = (m+1)y^m$$

Приведен пример вычисления максимального значения функции F в зависимости от значения параметра c.

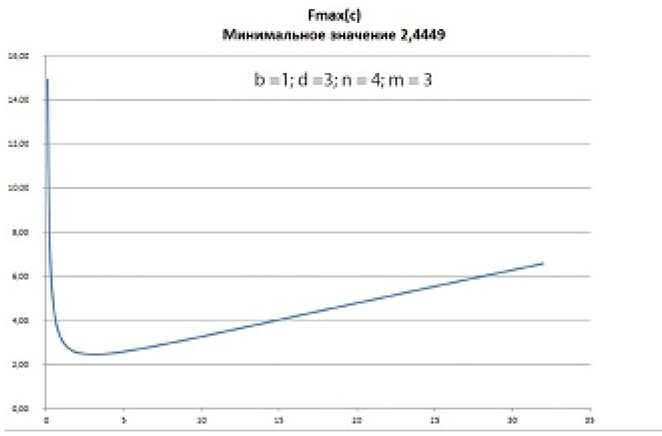

Рис 1. Зависимость Fmax(c)

Следует отметить, что качественно $Fmax(c)$ схожи в случаях 1, 2 при различных значениях параметров.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184а).

Список литературы

[1] Вагин В.С., Павлов И.В., *Моделирование и оптимизация квазилинейных сложных систем с учетом вероятностного характера приоритетов*, Вестник РГУПС, 2016, №1(61), с. 135–139.

[2] Красий Н.П., *Оптимизация квазилинейных моделей с независимыми приоритетами.* Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI, Ростов-на-Дону,24-29 апреля 2016 г., материалы конференции, с. 134-135.

[3] Углич С.И., *Численный анализ аналитических результатов, полученных при исследовании квазилинейных моделей со случайными приоритетами.* Международная конференция по стохастическим методам – Дюрсо,27.05 - 3.06 2016 г., материалы конференции, с. 68-69.

СИНХРОННЫЕ КОМПОНЕНТЫ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Фарков Ю.А.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ
(Россия, Москва)

E-mail: farkov@list.ru

Предлагается метод анализа финансовых временных рядов, основанный на статистических оценках котировок акций 16 российских компаний в скользящем временном окне и последующем их усреднении с целью выделения «аномальных» временных интервалов, в которых наблюдаются синхронные изменения свойств исследуемых акций. Анализируемые статистики сигналов включают в себя оценки энтропии, мультифрактальных свойств и предсказуемости временных рядов. Целью анализа является поиск предвестников резких колебаний цен на фондовых рынках.Совместное использование информации от нескольких временных рядов и от рассмотрения нескольких статистик – свойств этих рядов, позволяет определить «аномальные» интервалы времени с достаточно высокой статистической значимостью, несмотря на то, что интенсивность общей составляющей может быть невелика. Доклад основан на сданной в печать статье, написанной совместно с А.А. Любушиным и Е.А. Родионовым.

Список литературы

[1] Любушин А.А., Фарков Ю.А. *Меры синхронизации финансовых временных рядов*, XXIV Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». IX Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Международная конференция по стохастическим методам. 27 мая - 3 июня 2016 г. Материалы. Изд-во Фонд науки и образования, Ростов н/Д, 2016. С.144.

ШУМЫ И ГРАНИЦЫ КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Харин А. А.

Современная гуманитарная академия (Россия, Москва)

E-mail: aaharin@yandex.ru

Шум – важное и широко распространенное явление. В качестве характеристики шума обычно используется дисперсия. Обычно рассматривается только увеличение дисперсии значений измеряемой величины при появлении или увеличении шума. При этом не предполагается изменение положения математического ожидания или среднего значения измеряемой величины.

Однако, оказалось, что для конечных интервалов появление шума может приводить к появлению качественных изменений, а именно – запрещенных зон для математического ожидания или среднего значения величин возле границ этих интервалов.

В частности, доказана теорема существования ненулевых ограничений на математическое ожидание случайной величины при ненулевой минимальной дисперсии.

Получены новые формулы:

Для ограничений (Restrictions, запрещенных зон) $r_{Restrict.Expect}$ на математическое ожидание случайной величины $E(X)$ у границ конечного интервала $[a, b]$ при ненулевой минимальной дисперсии $E(X-\mu)^2 \geq \sigma^2_{Min} > 0$ получена цепочка неравенств

$$a < (a + r_{Restrict.Expect}) \leq E(X) \leq (b - r_{Restrict.Expect}) < b,$$

где ширина запрещенной зоны для математического ожидания $E(X)$ равна

$$r_{Restrict.Expect} = \frac{b-a}{2} - \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \sigma^2_{Min}}.$$

Если обозначить $h_{ab} \equiv (b-a)/2$ полуширину интервала, то ширина запрещенной зоны для математического ожидания будет выражаться компактной формулой

$$r_{Restrict.Expect} = h_{ab} - \sqrt{h^2_{ab} - \sigma^2_{Min}},$$

а полуширина разрешенной зоны для математического ожидания случайной величины — еще более компактной формулой

$$h_{Allowed.Expect} = \sqrt{h^2_{ab} - \sigma^2_{Min}}.$$

Теорема верифицирует идеи, использованные ранее автором в экономике в теории полезности, напр. в [1] и [2]. Применение этих идей позволило, по меньшей мере частично, объяснить известные проблемы и парадоксы теории полезности, в т.ч. недооценку больших и переоценку малых вероятностей, парадокс Алле, неприятие риска, парадокс четырех областей и др.

Список литературы

[1] Harin, A., *Data dispersion in economics (I) — Possibility of restrictions*, Review of Economics & Finance 2(3) (2012), 59–70.

[2] Harin, A., *Data dispersion in economics (II) — Inevitability and Consequences of Restrictions*, Review of Economics & Finance 2(4) (2012), 24–36.

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ХЕДЖИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР

Цветкова И.В.

Донской Государственный Технический Университет (Россия, Ростов-на-Дону)

E-mail: pilipenkoIV@mail.ru

К одним из основных задач, возникающих при исследования (B,S)-рынков, относятся определение справедливой цены опционов и построение хеджирующих стратегий (см.[1]). В докладе будет представлена работа программного комплекса, рассчитывающего компоненты самофинансируемого портфеля в случае одношагового (B,S)-рынка, заданного на $(\Omega, \mathbf{F})$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, $\mathcal{F}_0$–тривиальная σ-алгебра, $\mathcal{F}_1$ — σ–алгебра, порождённая разбиением Ω на счётное число атомов B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Вычислительные процедуры в программном комплексе основаны на теории хааровских интерполяций исходного финансового рынка с помощью специальных интерполяционных мартингальных мер (см.[2],[3],[4],[5]). Поскольку программный комплекс предназначен для исследования различных моделей неполных безарбитражных рынков со счётным числом состояний, возникает необходимость определения вычислительного горизонта для интерполирующего рынка. Для этого был использован метод квантильного хеджирования.

В качестве основного языка программирования выбран объектно-ориентированный язык C++. Разработка велась в среде Qt Creator, фреймворк Qt5. Дополнительно использовались: открытая «библиотека» функций для решения задач линейного программирования (GLPK – GNU Linear Programming Kit); модифицированный парсер и визуализатор языка MathML из открытой «библиотеки» Qwt.

Программный комплекс состоит из основной программы (загрузчика модулей) и подгружаемых модулей (представленных в виде динамических библиотек — DLL, реализующих графические интерфейсы и расчетную часть). Организован по принципу фреймворка таким образом, что предоставляет программисту, пишущему модуль, базовый набор примитивов (классы, функции) для организации работы с деревьями событий, их отображением, расчетами на них, а также позволяет реализовать интуитивно понятный пользовательский интерфейс. Такая логическая организация позволяет развивать и дополнять программный комплекс новыми моделями (помимо представленных).

Результаты расчётов программного комплекса могут быть использованы хеджерами и эмитентами акций и вторичных ценных бумаг, когда на рынке происходит массовая скупка рисковых активов.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184а).

Список литературы

[1] Цветкова И.В., Шамраева В.В. *Расчёт компонентов хеджирующего портфеля с помощью процедуры хааровской интерполяции.* Интернет-журнал "Науковедение 2013, №3.

[2] Данекянц А.Г., Павлов И.В. *Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности* . Обозрение прикладной и промышленной математики, 2004, т. 11, № 3., с. 506-508.

[3] Павлов И.В., Шамраева В.В., Цветкова И.В. *О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счётного вероятностного пространства.* Теория вероятностей и её применения, 2016, т. 61, № 1, с. 173–181.

[4] Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В. *Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров.* Вестник РГУПС, 2012, №3, с.177-181.

[5] Павлов И.В. ,Цветкова И.В., Шамраева В.В. *О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров:конструктивистский подход.* Вестник РГУПС, 2014, №4 (56), с.132-138.

ON-DIAGONAL OSCILATION FOR HEAT KERNELS ON ULTRAMETRIC SPACES

Bendikov A.D.

Institute of Mathematics, Wroclaw University (Poland, Wroclaw)

E-mail: bendikov@math.uni.wroc.pl

Let (X, d) be a locally compact separable ultrametric space. Given a measure m on X and a function $C(B)$ defined on the set of all non-singleton balls B of X we consider the hierarchical Laplacian $L = L_C$. The operator L acts in $L^2(X, m)$, is essentially self-adjoint and has a purely point spectrum. Under certain mild assumptions its Markov semigroup $(e^{-tL})_{t>0}$ admits a continuous heat kernel $p(t, x, y)$ w.r.t. m. We study asymptotic behaviour of the function $t \to p(t, x, x)$ assuming that X is a group and the operator L is translation invariant. In this case $p(t, x, x)$ does not depend on x, denote it $p(t)$. The function $p(t)$ is completely monotone. We show that it never varies regularly. When $X = \mathbb{Q}_p$, the ring of p-adic numbers, and $L = \mathcal{D}^\alpha$, the operator of fractional derivative of order α, we show that $p(t) = t^{-1/\alpha}\mathcal{A}(\log_p t)$, where $\mathcal{A}(\tau)$ is a continuous non-constant α-periodic function. We study asymptotic behaviour of $\min \mathcal{A}$ and $\max \mathcal{A}$ as the parameter p tends to ∞. When $X = S^{(\infty)}$, the infinite symmetric group, and L is a hierarchical Laplacian which has similar to $\mathcal{D}^\alpha$ metric structure, we show that, in contrary to the previous case, the complete monotone function $p(t)$ oscillates between two functions $\psi(t)$ and $\Psi(t)$ such that $\psi = o(\Psi)$ at infinity.

EQUATIONS OF LEONTIEFF TYPE IN TERMS OF CURRENT VELOCITIES OF STOCHASTIC PROCESSES

Yuri Gliklikh

Voronezh State University (Russia, Voronezh)

E-mail: yeg@math.vsu.ru

This is joint result with E.Yu. Mashkov.

In papers by A.L. Shestakov and G.A. Sviridyuk [1, 2] a new model of the description of dynamically distorted signals in some radio devises is suggested in terms of so-called Leontieff type equations (a particular case of algebraic-differential equations). In [3, 4, 5] in that model the influence of noise is taken into account in terms of the so-called current velocities of the Wiener process instead of using white noise. This allows the authors to avoid using the generalized function. It should be pointed out that by physical meaning, the current velocity is a direct analog of physical velocity for the deterministic processes. Note that the use of current velocity of the Wiener process means that in the construction of mean derivatives the σ-algebra “present” for the Wiener process is under consideration while there is also another possibility: to deal with the “present” σ-algebra of the solution as it is usually done in the theory of stochastic differential equation with mean derivatives. This approach is suggested in [6] under the assumption that the matrix pencil, that determines the equation, satisfies the so-called “rank-degree” condition. In this talk we consider stochastic Leontieff type equation given in terms of current velocities of the solution without this assumption.

The details can be found in [7].

The research is supported by Russian Science Foundation (RSF) Grant 14-21-00066, being carried out in Voronezh State University.

References

[1] Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. *A* new approach to measurement of dynamically distorted signals, Bulletin of South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming & Computer Software”, (2010) No. 16(192), 116-120 (Russian)

[2] Shestakov A.L., Sviridyk G.A. *O*ptimal measurement of dynamically distorted signals, Bulletin of South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming & Computer Software” (2011).- Issue 17(234).- 70 – 75. (Russian)

[3] Shestakov A. L., Sviridyk G.A. *O*n the measurement of the “white noise”, Bulletin of South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (2012) Issue 27(286), 99-108.

[4] Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff type equations with white noise by the method of mean derivatives of stochastic processes, Bulletin of South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”, (2012) Issue 27(286), 24-34 (Russian).

[5] Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes, Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, (2013) Issue 2, 25-39.

[6] Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution, Journal of Computational and Engineering Mathematics, 1 (2014) No. 2, 45–51.

[7] Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution II, Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 9 (2016) No. 3, 31 – 40.

Содержание

Секция 1. Общая теория операторов 3

Антоневич Анатолий Борисович, Глаз Анна Николаевна *Белорусский государственный университет(Беларусь, Минск)*
Почти-периодические алгебры, их пространства максимальных идеалов и автоморфизмы 3

Биданец Александр, Кудряшов Юрий Леонтьевич *Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского (Симферополь, Российская Федерация)*
J-изометрическая и J-унитарная дилатации операторного узла 4

Векслер Александр Семенович *Институт Математики при Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека (Узбекистан, Ташкент)*
Статистическая эргодическая теорема и некоторые свойства симметричных пространств измеримых функций 5

Зотиков Сергей Васильевич *КИИПТ (Россия, Симферополь)*
О некоторых свойствах интегралов Радемахера L_2-функций 6

Кудряшов Юрий Леонтьевич, Третьяков Дмитрий Вадимович *КФУ им. В.И.Вернадского (Россия, Симферополь)*
Об одном подходе к построению J-самосопряжённой дилатации линейного оператора 7

Ляхов Лев Николаевич *Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)*
Об одном представлении j-функции Бесселя 7

Муратов Мустафа Абдурешитович, Рубштейн Бенцион Абрамович *Крымский федеральный университет (Россия, Симферополь), Университет Бен Гуриона в Негеве (Израиль, Беер Шева)*
Теорема вложения $\Lambda^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$ 8

Нужин Яков Нифантьевич *Сибирский федеральный университет (Россия, Красноярск)*
Обобщенные конгруэнц-подгруппы 9

Пашкова Юлия Сергеевна, Рубштейн Бенцион Абрамович *Крымский федеральный университет (Россия, Симферополь), Университет Бен Гуриона в Негеве (Израиль, Беер Шева)*
Сходимость чезаровских средних в симметричных пространствах измеримых функций 9

Пеллер Владимир Всеволодович *(Россия, США, Восточный Лэнсинг)*
Задача М.Г. Крейна и формула следов Лифшица - Крейна 10

Плиев Марат Амурханович *Южный математический институт (Россия, Владикавказ)*
Об аналитическом представлении операторов, согласованных с порядком. 10

Преображенский Игорь Евгеньевич *ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Россия, Ярославль)*
О сходимости сумм Римана для пространств функций определяемых k-модулем непрерывности 11

Санина Елизавета Львовна *Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)*
Неравенство Бернштейна для B-производной j-многочлена Шлемильха 12

Цвиль Мария Михайловна *Ростовский филиал Российской таможенной академии (Россия, Ростов-на-Дону)*
Некоторые свойства операторов Фабера для полицилинцдрических областей 13

Шульман Виктор Семенович *Вологодский государственный университет (Россия, Вологда)*
О некоторых задачах Халмоша, относящихся к теории инвариантных подпространств 14
Шульман Екатерина Викторовна *Вологодский Государственный Университет (Россия, Вологда), Silesian University (Poland, Katowice)*
Полиномиальные функции на группах и функциональные уравнения 14

Секция 2. Спектральная теория операторов 15

Ахмерова Эльвира Фангизовна *Башкирский государственный университет (Россия, Уфа)*
О новом методе нахождения формул регуляризованных следов возмущений дифференциальных операторов в частных производных 15
Барсуков Андрей Иванович, Домнич Анастасия Александровна *ВГАСУ (Россия, Воронеж), ВГУ (Россия, Воронеж)*
О связи различных представлений функций, обратных к квадратичным гиперболическим матричным пучкам 16
Бондаренко Наталья Павловна, Бутерин Сергей Александрович *Самарский университет (Россия, Самара), Саратовский государственный университет (Россия, Саратов)*
Восстановление интегро-дифференциального оператора Дирака по спектру 17
Бондаренко Наталья Павловна, Бутерин Сергей Александрович, Васильев Сергей Владимирович *Самарский университет (Россия, Самара), Саратовский государственный университет (Россия, Саратов)*
О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля с замороженным аргументом 18
Власов Виктор Валентинович *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Россия, Москва)*
Спектральный анализ вольтерровых интегродифференциальных уравнений 19
Волчков Валерий Владимирович, Волчков Виталий Владимирович *Донецкий национальный университет (Донецк)*
Спектральный синтез на группе конформных автоморфизмов единичного круга 20
Копачевский Николай Дмитриевич, Якубова Алие Рустемовна *ФГАОУ ВО "КФУ им. В. И. Вернадского"(Россия, Симферополь)*
О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами 20
Кувардина Лариса Петровна *Саратовский национальный исследовательский государственный университет (Россия, Саратов)*
Об интегральном операторе с переменным пределом интегрирования 22
Кукушкин Максим Владимирович *Институт прикладной математики и автоматизации (Россия, Нальчик)*
О росте собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших ченах 23
Рыхлов Виктор Сергеевич *Саратовский госуниверситет (Россия, Саратов)*
О кратной полноте корневых функций одного сильно нерегулярного пучка дифференциальных операторов третьего порядка 24
Скороходов Сергей Леонидович, Кузьмина Наталия Петровна *ФИЦ ИУ РАН, ИО РАН (Россия, Москва)*
Исследование модифицированной спектральной задачи Орра–Зоммерфельда в приложении к некоторым проблемам океанологии 25

Gorbunov Oleg, Yurko Vjacheslav *Saratov University (Saratov, Russia)*
Dirac system with singularities in interior points 26

Yurko Vjacheslav *Saratov University (Saratov, Russia)*
On inverse problems for differential pencils with nonlocal boundary conditions 26

Секция 3. Обыкновенные дифференциальные и дифференциально-операторные уравнения 28

Васильева Татьяна Анатольевна, Васильев Евгений Иванович *Волгоградский Государственный Университет (Россия, Волгоград)*
Мульти-неявные разностные методы решения жестких систем ОДУ и их приложения 28

Гринес Вячеслав Зигмундович *НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород)*
Потоки на замкнутых поверхностях и теория Аносова-Вейля 28

Даровская Ксения Александровна *RUDN University (Россия, Москва)*
Суммируемость корневых функций одной нелокальной задачи с одночленными интегральными условиями 29

Закора Дмитрий Александрович *КФУ им. В.И. Вернадского (РФ, Симферополь), ВГУ (РФ, Воронеж)*
Об экспоненциальной устойчивости одной полугруппы 30

Иванисенко Наталья Сергеевна *Донецкий национальный университет (Украина, Донецк)*
Вариант формулы Остроградского для четырехмерного симплекса 30

Куренков Евгений Дмитриевич *НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород)*
О динамике эндоморфизмов поверхностей с одномерными базисными множествами 31

Осипенко Георгий Сергеевич *Филиал МГУ в Севастополе (Россия, Севастополь)*
Символический анализ динамических систем 32

Починка Ольга Витальевна *НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород)*
Динамические системы Морса-Смейла 33

Шамолин Максим Владимирович *МГУ имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация, Москва)*
Интегрируемые системы с диссипацией на касательных расслоениях двумерных многообразий 34

Шиловская Анна Анатольевна *ННГУ им. Н.И. Лобачевского (РФ, Нижний Новгород)*
Динамика трехмерных диффеоморизмов с одномерными базисными множествами, просторно расположенными на 2-торах 35

Юнаковский Алексей Дмитриевич *ИПФ РАН (Россия, Нижний Новгород)*
Применение операторной экспоненты в прикладных задачах 36

Anashkin Oleg, Yusupova Olga *V. I. Vernadskiy Crimean Federal University (Russia, Simferopol)*
The critical case of stability in impulsive system 37

Kornev Sergey *Voronezh State Pedagogical University (Russia, Voronezh)*
On the method of non-smooth multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential equations 38

Sidorov Nikolai, Sidorov Denis, Li Yong *Irkutsk State University (Russia, Irkutsk), Hunan University (Changsha, China)*
Skeleton decomposition on linear operators in the theory of initial boundary value problems 39

Секция 4. Дифференциальные уравнения в частных производных 40

Балашова Галина Сергеевна *НИУ "МЭИ"(Россия, Москва)*
К вопросу разрешимости краевой задачи для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка ... 40

Зарубин Александр Николаевич *Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева (Россия, Орел)*
Задача Трикоми для функционально-дифференцального нелинейного уравнения смешанного типа ... 41

Калинин Алексей Вячеславович, Тюхтина Алла Александровна *Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Россия, Нижний Новгород)*
L_p-оценки векторных полей и их применение в задачах электромагнитной теории ... 41

Кащенко Сергей Александрович, Преображенская Маргарита Михайловна *ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Россия, Ярославль)*
Двумерные торы обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза ... 42

Киселев Олег Михайлович, Новокшенов Виктор Юрьевич *Институт математики с ВЦ УНЦ РАН (Россия, Уфа)*
Авторезонанс в модели генератора терагерцевых волн ... 43

Кожевникова Лариса Михайловна *Стерлитамакский филиал БашГУ (Россия, Стерлитамак)*
Об энтропийных решениях эллиптических уравнений в неограниченных областях ... 44

Копачевский Николай Дмитриевич, Радомирская Карина Александровна *КФУ им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Спектральные задачи, порожденные абстрактными задачами сопряжения . 45

Корнута Анжелика Александровна *Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности ... 46

Лиманский Дмитрий Владимирович *ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" (Украина, Донецк)*
Эллиптические и квазиэллиптические системы дифференциальных операторов в пространствах Соболева ... 47

Лукьяненко Владимир Андреевич *Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Задачи типа Карлемана для двух функций ... 48

Лукьяненко Владимир Андреевич, Трондина Надежда Игоревна *Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Периодические уравнения типа свертки ... 49

Марковский Алексей Николаевич *Кубанский госуниверситет (Россия, Краснодар)*
Задача выделения полигармонической составляющей функции ... 50

Мешкова Юлия Михайловна, Суслина Татьяна Александровна *Санкт-Петербургский государственный университет (Россия, Санкт-Петербург)*
Усреднение эллиптических и параболических систем: операторные оценки погрешности ... 50

Мурзабекова Г.Е., Нуртазина К.Б. *КАТУ им.С.Сейфуллина, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан, Астана)*
Обратные задачи для параболических уравнений на произвольных графах . 51

Назаров Артур Карапетович *Южный федеральный университет (Россия, г. Ростов-на-Дону)*
Системы дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Асимптотика решения ... 52

Панов Евгений Юрьевич *Новгородский государственный университет (Россия, Великий Новгород)*
О поведении почти периодических энтропийных решений скалярных законов сохранения при больших временах 53

Пастухова Светлана Евгеньевна *Московский технологический университет (Россия, Москва)*
Об оценках усреднения для параболических уравнений 54

Пикулин Сергей Владимирович *Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН (Россия, Москва)*
О сходимости решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения в областях с шаровыми полостями 55

Пламеневский Борис Алексеевич, Сарафанов Олег Васильевич *Санкт-Петербургский государственный университет (Россия, Санкт-Петербург)*
Метод вычисления матрицы рассеяния в волноводах 56

Плышевская Светлана Петровна *Таврическая академия Крымского федерального университета имени В.И.Вернадского (Россия, Симферополь)*
Динамика стационарных структур в параболической задаче 57

Солдатов Александр Павлович *НИУ БелГУ (Белгород, Россия)*
Интегралы с однородно-разностными ядрами на плоскости 58

Солонуха Олеся Владимировна *ЦЭМИ РАН (РФ, Москва)*
О неоднозначной разрешимости нелокальной задачи с p–лапласианом 58

Урбанович Татьяна Михайловна *Полоцкий государственный университет (Беларусь, Полоцк)*
К теории особого случая сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши 58

Фаминский Андрей Вадимович *Российский университет дружбы народов (Россия, Москва)*
Краевые задачи для уравнения Захарова–Кузнецова 59

Хазова Юлия Александровна *Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Исследование параболической задачи с преобразованием поворота пространственной переменной 60

Чаплыгина Елена Викторовна *Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева (Россия, Орел)*
Задача Геллерстедта для функционально-дифференцального нелинейного уравнения смешанного типа 61

Чугайнова Анна Павловна *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия, г. Москва)*
Единственность автомодельных решений задачи о распаде произвольного разрыва обобщенного уравнения Хопфа 61

Muravnik Andrey *JSC "Concern "Sozvezdie" (Russia, Voronezh), RUDN University (Russia, Moscow)*
Parabolic differential-difference equations in half-spaces 62

Skubachevskii A.L. *RUDN University (Russia, Moscow)*
Vlasov–Poisson Equations with External Magnetic Field and Plasma Confinement 62

Секция 5. Теория управления и экстремальные задачи 63

Белоусов Федор Анатольевич *ЦЭМИ РАН (Россия, Москва)*
Вариационная задача с отклоняющимся аргументом, управление граничными условиями 63

Бильченко Григорий Григорьевич, Бильченко Наталья Григорьевна *Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет (КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева (Россия, г. Казань)*
О некоторых вычислительных экспериментах в обратных задачах тепломассообмена 64

Бильченко Григорий Григорьевич, Бильченко Наталья Григорьевна *Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет (КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева (Россия, г. Казань)*
О возможности восстановления управления в некоторых обратных задачах тепломассообмена 64

Кумакшев Сергей Анатольевич *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Россия, Москва)*
Управление движением сосуда с тяжелой жидкостью 66

Руновский Константин Всеволодович, Омельченко Наталья Викторовна *Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в Севастополе, Севастопольский государственный университет (Россия, Севастополь)*
Смешанный обобщенный модуль гладкости и приближение “углом” 67

Семёнов Владимир Викторович *Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко (Украина, Киев)*
Сходимость двухэтапного проксимального алгоритма для задачи равновесного программирования 68

Царьков Игорь Германович *МГУ (Россия, Москва)*
Непрерывная выборка из множества почти наилучших приближений 69

Balashov Maxim *Moscow Institute of Physics and Technology (Russia, Moscow)*
About the error of approximation of convex compacta in $\mathbb{R}^n$ 69

Секция 6. Теория игр и экономическое поведение 71

Бардин Александр Евгеньевич, Житенева Юлия Николаевна, Макаркина Татьяна Владимировна *Государственный гуманитарно-технологический университет (Россия, г. Орехово-Зуево)*
Двухкритериальная модель конечной игры с природой с учетом рисков и сожалений 71

Жуковский Владислав Иосифович *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)*
Математическая теория Золотого правила 72

Жуковский Владислав Иосифович, Высокос Мария Ивановна *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва), Государственный гуманитарно-технологический университет (Россия, Орехово-Зуево)*
Исход и риск в многошаговой позиционной задаче при неопредленности . . 73

Жуковский Владислав Иосифович, Кириченко Михаил Михайлович, Болдырев Михаил Владиславович *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)*
Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности 74

Жуковский Владислав Иосифович, Макаркина Татьяна Владимировна *Московский государственнй университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва), Государственный гуманитарно-технологический университет (Россия, Орехово-Зуево)*
Сравнение равновесий по Нэшу и Бержу в модели дуополии Бертрана 75

Солдатова Наталья Геннадьевна *Государственный гуманитарно-технологический университет (Россия, Орехово-Зуево)*
Сильно гарантированное по эффективности и риску решение задачи взаимодействия агентов 76

Фомина Татьяна Петровна *Липецкий государственный педагогический университет (Россия, Липецк)*

Игры с природой и оптимальный выбор особой экономической зоны 77

Шульман Виктор Семенович *Вологодский государственный университет (Россия, Вологда)*

Одна теорема о минимаксе, связанная с некоторыми задачами теории операторов 78

Югай Лев Павлович *Филиал Российского государственного университета нефти и газа (НИУ) им. И.М.Губкина в г. Ташкенте (Узбекистан, Ташкент)*

О достижимости оптимальных параметров уклонения в минимаксных квазилинейных дифференциальных играх 78

Секция 7. Математическое моделирование и приближенные методы в механике сплошных сред 79

Айзикович Сергей Михайлович *Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)*

Внедрение штампа в трансверсально-изотропное полупространство с функционально-градиентным покрытием 79

Белоусов Федор Анатольевич, Истратов Виктор Александрович *ЦЭМИ РАН (Россия, Москва)*

Модель «кочевников» и «землепашцев»: агент-ориентированное моделирование цивилизации с двумя способами воспроизводства продукта 79

Билялова Лилия Ремзиевна *Крымский инженерно-педагогический университет (Россия, Симферополь)*

О прикладном моделировании излучения телекоммуникационных сетей с учетом особенностей топографии и электромагнитных характеристик 80

Гольдман Наталия Львовна *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)*

Математическая модель нелинейной обратной задачи теплофизики для композиционного материала 81

Желтухин Виктор Семенович, Шемахин Александр Юрьевич, Markus H. Thoma, Шарафеев Рустем Фаридович *Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, Казань), Казанский национальный исследовательский технологический университет (Россия, Казань), Justus-Liebig-Universitet Giessen (Германия, Гиссен)*

Моделирование тлеющего и ВЧЕ-разрядов в пакете OpenFOAM 82

Калинин Алексей Вячеславович, Слюняев Николай Николаевич *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт прикладной физики РАН (Россия, Нижний Новгород)*

Математическое и численное моделирование глобальной электрической цепи в атмосфере Земли 83

Копачевский Николай Дмитриевич, Войтицкий Виктор Иванович *Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*

Малые движения системы двух сочленённых тел с полостями, частично заполненными тяжелой вязкой жидкостью 84

Копачевский Николай Дмитриевич, Ситшаева Зера Зекерьяевна *Таврическая академия КФУ имени В.И. Вернадского, Воронежский государственный университет, Крымский инженерно-педагогический университет (Россия, Симферополь)*

О математическом моделировании поведения жидкости в сосуде с отверстиями 85

Кузнецов Евгений Борисович, Будкина Елена Михайловна, Яковенко Анастасия Дмитриевна *Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет) (Россия, Москва)*

Численное решение краевой задачи для нелинейных сингулярно возмущенных дифференциально-алгебраических уравнений 86

Лежнев Виктор Григорьевич, Бочкарев Роман Николаевич *Кубанский Государственный Университет (Россия, Краснодар)*

Потенциал Робена и собственный вихрь в 2D области 87

Ракчеева Татьяна Анатольевна *Институт машиноведения РАН (Россия, Москва)*

Аппроксимационный базис многофокусных кривых для описания гладких форм 87

Семенов Евгений Сергеевич *Институт прикладной физики РАН (Россия, Нижний Новгород)*

Математическое моделирование электронно-оптических систем гиротронов 88

Слепышев Александр Алексеевич, Воротников Дмитрий Игоревич *Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в Севастополе (Россия, Севастополь)*

Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами 89

Филиппов Александр Иванович, Михайлов Павел Никонович *Башкирский государственный университет (Россия, Стерлитамак), Институт прикладных исследований Республики Башкортостан (Россия, Стерлитамак)*

Асимптотические решения взаимосвязанных задач тепло- и массопереноса фильтрации активных растворов 89

Чекмарев Дмитрий Тимофеевич *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Россия, Нижний Новгород)*

Об анализе вариационно-разностных и КЭ схем конечно-разностными методами 90

Арутюнян Роберт Владимирович *Московский технический университет связи и информатики (Россия, Москва)*

Новый подход к редукции многомерных линейных краевых задач к эквивалентным граничным интегральным уравнениям 91

Секция 8. Дискретная математика и информатика. Методика преподавания математики в высшей школе и история математики 92

Балицкий Виктор Александрович, Войтицкий Виктор Иванович *Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*

Математические игры как форма проведения зачётных занятий по математике в средней и высшей школе 92

Белозуб Владимир Антонович, Козлова Маргарита Геннадьевна *Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*

Интеллектуализация обработки данных в некорректных задачах дискретной оптимизации 92

Билялова Лилия Ремзиевна, Ситшаева Зера Зекерьяевна *Крымский инженерно-педагогический университет (Россия, Симферополь)*

Об информационно-компетентностной подготовке студентов-гуманитариев 93

Бурцев Алексей Анатольевич *Московский физико-технический институт (государственный университет) (Россия, Москва)*

О схемной сложности умножения в некоторых конечных полях 94

Германчук Мария Сергеевна *Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*

Многоагентный подход в сетевых задачах 95

Гуров Сергей Исаевич *МГУ им. М. В. Ломоносова (Россия, Москва)*

О вероятности 0-события в малой выборке 96

Иноятов Сулейман Иноятович, Арипова Халима Ариповна *Навоийский государственный педагогический институт (Узбекистан, Навои)*
Триумфатор науки средневекового востока 96

Козлова Маргарита Геннадьевна *Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Интеллектуальные агенты в задачах дискретной оптимизации 97

Кочергин Андрей Васильевич *МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)*
Математическая подготовка и мировоззрение 99

Кушнерева Галина Ивановна, Сёмкина Екатерина Владимировна *Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Методические разработки для практических занятий по теме: Двойные интегралы 100

Маманазаров А.Б., Маъмуров Б.Б., Мадримов Б., Маманазаров М.А., Ульмасова Г.А. *Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте (Узбекистан, Ташкент)*
Интегративная функция педагогической науки по формированию экономической культуры у студентов в едином образовательном пространстве 100

Марянин Борис Давидович, Смирнова Светлана Ивановна *Таврическая академия Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Об итогах вступительной кампании в Крымском федеральном университете имени В.И. Вернадского в 2016 году 101

Пузанкова Людмила Викторовна *Рязанский государственный университет им. Есенина С.А. (Россия, Рязань)*
Применение новых информационных технологии в профессиональной подготовке бакалавров математиков 101

Старков Павел Александрович *Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Перспективы использования облачных технологий в процессе постоянного обучения 103

Субботин Владимир Иванович *ЮРГПУ (НПИ) (Россия, Новочеркасск)*
О полноте списка сильно симметричных многогранников 103

Шкаликова Надежда Асановна *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Россия, Москва)*
О реализации универсальной функции для множества симметрических функций схемами специального вида 104

Blagoveshchenskaya Ekaterina, Kunetz Dina *Petersburg State Transport University (Russia, Saint-Petersburg)*
Graphs and algorithms in direct decomposition theory of torsion-free abelian groups 105

Секция 9. Теория вероятностей. Случайные процессы. Финансовая математика. Математическая статистика 106

Асылгареев Артур Салаватович *Уфимский государственный авиационный технический университет (Россия, Уфа)*
О применении теорем сравнения к исследованию потраекторной устойчивости 106

Белопольская Яна Исаевна *Санкт-Петербургский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Россия)*
Вероятностные представления различных классов решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений 106

Григорьева Анастасия Олеговна *Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (Россия, Санкт-Петербург)*
Марковские процессы, ассоциированные с нелинейными системами параболических уравнений ... 107

Задорожний Владимир Григорьевич *Воронежский госуниверситет (Россия, Воронеж)*
Один вариант задачи о портфеле ... 108

Залыгаева Марина Евгеньевна *Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)*
О некоторых моделях движения вязкой жидкости и стохастическом подходе к их описанию ... 109

Красий Надежда Павловна *Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)*
О некоторых особых случаях оптимизации квазилинейных систем с независимыми приоритетами ... 110

Макарова Алла Викторовна *ВУНЦ ВВС "ВВА"имени Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (Россия, Воронеж)*
О разрешимости стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями со специальной правой частью ... 110

Мелкумова Лана Эдуардовна, Шатских Сергей Яковлевич *ООО «Меркури Девелопмент Раша», Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (Россия, Самара)*
Достаточные статистики в теореме де Финетти ... 112

Немченко Екатерина Игоревна *Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (Россия, Санкт-Петербург)*
Вероятностные представления решений нелинейных параболических задач и численные методы, ассоциированные с ними ... 113

Павлов Игорь Викторович *Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)*
Стохастический анализ на деформированных структурах ... 113

Савинов Евгений Анатольевич *СамНИУ (Россия, Самара)*
Асимптотика максимума в треугольной схеме сильно зависимых случайных величин ... 114

Углич Сергей Илларионович *Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)*
Анализ результатов исследования двух квазилинейных моделей со случайными и различно распределенными приоритетами ... 115

Фарков Юрий Анатольевич *Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Россия, Москва)*
Синхронные компоненты финансовых временных рядов ... 116

Харин Александр Александрович *Современная гуманитарная академия (Россия, Москва)*
Шумы и границы конечных интервалов ... 117

Цветкова Инна Владимировна *Донской Государственный Технический Университет (Россия, Ростов-на-Дону)*
Программный комплекс для хеджирования с помощью интерполяционных мартингальных мер ... 118

Bendikov Alexander Davidovich *Institute of Mathematics, Wroclaw University (Poland, Wroclaw)*
On-diagonal oscilation for heat kernels on ultrametric spaces ... 119

Gliklikh Yuri *Voronezh State University (Russia, Voronezh)*
Equations of Leontieff type in terms of current velocities of stochastic processes ... 119