Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Российский фонд фундаментальных исследований
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Математический Фонд Крыма
Крымская Академия Наук

Международная конференция

КРОМШ-2015

XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум
по спектральным и эволюционным задачам

СБОРНИК ТЕЗИСОВ
Том 2

Батилиман (Ласпи), Российская Федерация, 17 – 29 сентября

2015

УДК 517.9:519.2
Международная научная конференция “XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2015).” Тезисы докладов. – Симферополь, ДИАЙПИ, 2015. - 140 с.

ISBN: 978-5-9906858-7-1

Сборник издан при финансовой поддержке РФФИ.

Конференция поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

ДВУХФАЗНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Гольдман Н. Л.

МГУ им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: goldman@srcc.msu.ru

Дано обоснование постановок в классах Гёльдера обратных задач с неизвестными коэффициентами при младших членах в квазилинейных параболических уравнениях в двухфазной области с дополнительной информацией в виде финального переопределения. В теплофизической интерпретации такие задачи, называемые обратными задачами Стефана, состоят в нахождении температурного поля, фронта фазового перехода и тепловых источников по заданным в конечный момент времени распределению температуры и положению фазового фронта.

Соответствующая прямая постановка двухфазной задачи Стефана заключается в нахождении функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2$ и фазового фронта $\xi(t)$ при $0 \le t \le T$, удовлетворяющих в $Q_1 = \{0 \le x \le \xi(t), 0 \le t \le T\}$ и $Q_2 = \{\xi(t) \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ уравнениям

$$c^k(x,t,u)u_t - L^k u = 0, \quad (x,t) \in Q_k, \quad k = 1,2, \tag{1}$$

граничным условиям при $x = 0$, $x = l$

$$u|_{x=0} = v^1(t), \quad u|_{x=l} = v^2(t), \quad 0 < t \le T, \tag{2}$$

начальному условию при $t = 0$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \quad \xi|_{t=0} = l_0, \quad 0 < l_0 < l, \tag{3}$$

и условиям на фронте фазового перехода

$$u|_{x=\xi(t)} = u^*(t), \quad 0 < t \le T, \tag{4}$$

$$\gamma(x,t,u)|_{x=\xi(t)}\xi_t(t) = \big[a(x,t,u)u_x\big]_{x=\xi(t)} + \chi(x,t,u)|_{x=\xi(t)}, \quad 0 < t \le T, \tag{5}$$

где равномерно эллиптический оператор $L^k u$ имеет вид

$$L^k u \equiv (a^k(x,t,u)u_x)_x - b^k(x,t,u)u_x - f^k(x,t,u),$$

$a^k \ge a^k_{\min} > 0$, b^k, $c^k \ge c^k_{\min} > 0$, f^k, v^k, u^*, $\gamma \ge \gamma_{\min} > 0$, χ и φ — известные функции, $a^k_{\min}$, $c^k_{\min}$, $\gamma_{\min}$, $l_0 = \mathrm{const} > 0$, $k = 1,2$, $\big[a(x,t,u)u_x\big]_{x=\xi(t)} = a^2(x,t,u)u_x|_{x=\xi(t)+0} - a^1(x,t,u)u_x|_{x=\xi(t)-0}$.

Предполагается, что функции $f^k(x,t,u)$ имеют структуру $f^k(x,t,u) = p^k d^k(x,t,u)$, в которой функции $d^k(x,t,u)$ заданы, а p^k — неизвестные коэффициенты вида $p^k(x)$, $p^k(u)$ либо $p^k(x,u)$, $k = 1,2$.

Под решением соответствующей коэффициентной обратной задачи Стефана понимается совокупность функций $\{u(x,t), \xi(t), p^1(x), p^2(x)\}$, $\{u(x,t), \xi(t), p^1(u), p^2(u)\}$ либо $\{u(x,t), \xi(t), p^1(x,u), p^2(x,u)\}$, принадлежащих классам

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_k), \quad \xi(t) \in H^{1+\lambda/2}(0,T], \quad 0 < \beta_0 \le \xi(t) \le \beta_1 < l,$$
$$p^1(x) \in C^1[0,\beta_1], \quad p^2(x) \in C^1[\beta_0,l],$$
$$p^k(u) \in C^1[-M_0^k, M_0^k], \quad p^k(x,u) \in C^{1,1}(\overline{\Omega}_k), \quad k = 1,2,$$
$$\overline{\Omega}_1 = [0,\beta_1] \times [-M_0^1, M_0^1], \quad \overline{\Omega}_2 = [\beta_0,l] \times [-M_0^2, M_0^2],$$
$$\beta_0, \beta_1, M_0^k = \mathrm{const} \ > 0,$$

удовлетворяющих соотношениям (1)–(5) и дополнительному условию в конечный момент времени

$$u|_{t=T} = g(x), \quad 0 \le x \le l, \quad \xi|_{t=T} = l_T,$$

в предположении, что $g(x)$ и l_T заданы, $l_T = \mathrm{const}$, $0 < l_T < l$.

О СВОЙСТВАХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Гольдман Н. Л.

МГУ им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: goldman@srcc.msu.ru

Рассматривается система, состояние которой определяется как решение $u(x,t;v)$ задачи управления в области $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,T]$

$$u_t - Lu = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u|_{S\times(0,T]} = 0, \quad u|_{t=0} = v(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} - c(x,t)u,$$

где Lu — равномерно эллиптический оператор с вещественными гладкими коэффициентами, $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей S, $v(x)$ — управляющая функция из $\overset{0}{C}(\overline{\Omega})$.

Для ее наблюдений, усредненных на временном интервале $[T-T_0, T]$,

$$\overline{u}(x;v) = T_0^{-1} \int\limits_{T-T_0}^{T} u(x,t;v)\,dt, \quad 0 < T_0 \le T,$$

установлены следующие свойства.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *непрерывны в* $\overline{Q}$ *вместе с производными* $(a_{ij})_t$, $(b_i)_{x_i}$ *и кроме того,* $c(x,t) \ge 0$ *в* $\overline{Q}$. *При пробегании управлением* $v(x)$ *всего пространства* $\overset{0}{C}(\overline{\Omega})$ *соответствующие усредненные наблюдения образуют множество, всюду плотное в* $L_2(\overline{\Omega})$, *т.е. из соотношения для некоторой функции* $w(x) \in \overset{0}{C}(\overline{\Omega})$

$$\int\limits_{\Omega} \overline{u}(x;v)\,w(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in \overset{0}{C}(\overline{\Omega})$$

следует, что $w(x) = 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$.

Обобщением этого свойства является

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если для любого управления* $v(x)$ *из* $\overset{0}{C}(\overline{\Omega})$ *соответствующие решения задачи* (1), (2) *удовлетворяют соотношению*

$$\int\limits_{T-T_0}^{T} \int\limits_{\Omega} u(x,t;v)\,w(x,t)\,dx\,dt = 0 \quad \forall v \in \overset{0}{C}(\overline{\Omega})$$

для некоторой непрерывной в $\overline{Q}$ *функции* $w(x,t)$, *не меняющей знак по переменной* t *при* $0 \le t \le T$, *то* $w(x, T-T_0) = 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$.

Следствием теоремы 2 является плотность наблюдений задачи управления (1), (2), усредненных с весом

$$\overline{u}(x;v;p) = T_0^{-1} \int\limits_{T-T_0}^{T} p(t)u(x,t;v)\,dt, \quad 0 < T_0 \le T,$$

$p(t) > 0$ — весовая функция, непрерывная при $0 \le t \le T$.

Доказательство этих утверждений основано на принципе двойственности и свойстве обратной единственности для линейных параболических операторов. Если Lu — самосопряженный оператор с коэффициентами, не зависящими от t, то в [1] соответствующие свойства плотности установлены Ж.-Л. Лионсом с помощью преобразования Фурье. Результаты теорем 1, 2 подтверждают его предположение, что свойство плотности усредненных наблюдений имеет место и в случае линейных параболических операторов более общего вида, чем в [1].

Значение этих свойств плотности (как установленных Лионсом, так и их обобщений) не ограничивается задачами управления. Данная работа продолжает исследования [2], [3] о применении указанных свойств к обратным параболическим задачам на основе принципа двойственности. Такой подход позволяет установить связь проблемы единственности для этих обратных задач со свойствами плотности решений соответствующих сопряженных задач, которые являются задачами управления для линейных параболических операторов вида (1), (2). В частности, это дает возможность изучать обратные параболические задачи в областях с подвижными границами (в отличие от известных ранее результатов [4], [5], полученных при условии независимости коэффициентов уравнения от t).

Список литературы

[1] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. *Метод квазиобращения и его приложения*, М.: Мир, 1970.

[2] Гольдман Н. Л. *Свойства решений параболических уравнений с неизвестной правой частью и их сопряженных задач*, Доклады АН. Т. 420, № 2 (2008), с. 151-156.

[3] Гольдман Н.Л. *Применение принципа двойственности в обратных задачах для параболических уравнений с неизвестной правой частью*, Вычисл. методы и программирование. Т. 15 (2014), с. 130-142.

[4] Клибанов М.В. *Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений*, Доклады АН. Т. 280, № 3 (1985), с. 533-536.

[5] Прилепко А.И., Соловьев В.В.*Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа*, Дифференциальные уравнения. Т. 23, № 11 (1987), с. 1971-1980.

К ОДНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА С ТРЕМЯ ТОВАРОПРОИЗВОДИТЕЛЯМИ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Жаркынбаев С.Ж., Нитто Л.С., Айынова А.

Алматы Университеті (Республика Казахстан, Алматы)
E-mail: zhsholpan@yandex.kz

1. Постановка задачи. Рассматривается функционирование рынка бесконечно делимого продукта (например, рынок зерна.) Предполагается, что функция спроса на продукт известна. Будем рассматривать функцию спроса с постоянным коэффициентом эластичности из [1].

$$\varphi(p) = b - \frac{b}{a}p, \quad 0 < p < a,$$

где $\frac{b}{a}$ – коэффициент эластичности спроса, p – цена товара, a – его максимально возможная цена; b – максимальное количество товара, которое может поглотить рынок.

Далее ограничимся случаем трех товаропроизводителей и следующими функциями предложения с постоянными коэффициентами эластичности

$$\psi_i(p) = k_i p, \quad 0 < p < \infty \quad (i = 1, 2, 3).$$

При этом предполагаем, что пределы изменения индивидуального коэффициента эластичности заданы

$$k_i \in \mathrm{X}_i = [k^*, k^{**}], \quad 0 < k^* \leq k^{**} < \infty. \tag{1}$$

Экономическая цель товаропроизводителя состоит в получении возможно большей прибыли с проданного товара, которая определяется функцией

$$f_i(k_1, k_2, k_3, y) = k_i \bar{p}^2 = \frac{k_i b^2 3}{(\frac{b}{a+y} + k_1 + k_2 + k_3)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Максимизация прибыли осуществляется за счет выбора коэффициента эластичности в пределах, установленных в (1).

2. Математическая модель. В качестве математической модели описанной выше экономической ситуации рассматривается бескоалиционная игра трех лиц при неопределенности

$$\langle \{1, 2, 3\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2,3}, \mathrm{Y}, \{f_i(x_1, x_2, x_3, y)\}_{i=1,2,3} \rangle. \tag{3}$$

Здесь 1,2, и 3 — порядковые номера товаропроизводителей (называемых далее игроками). Стратегия i-го игрока индивидуальный коэффициент эластичности

$$x_i \in \mathrm{X}_i = [k^*, k^{**}], \quad (i = 1, 2, 3),$$

постоянные

$$k^{**} > k^* > 0.$$

Утверждение. Предположим, что для математической модели рынка с тремя товаропроизводителями постоянные $b > 0$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $0 < k^* < \frac{b}{3(a+\alpha)} < k^{**} < \frac{2b}{3a}$. Тогда при любом выборе постоянной 3x3 –матрицы A с положительными элементами A-гарантированное G-активно равновесное решение (x^G, f^{GA}) игры (2) имеет вид

$$x^G = (x_1^G, x_2^G, x_3^G), \quad x_i^G = \frac{b}{3(a+\alpha)} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$f^{GA} = (f_1^{GA}, f_2^{GA}, f_3^{GA}), \quad f_i^{GA} = \frac{b(a+\alpha)}{12} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Список литературы

[1] Сафронов С.Г. *Модель рынка n товаропроизводителей* // Сб. науч. трудов. Псковский пединститут, 1994. С.157-162.

КРИТЕРИЙ ДИСКРЕТНОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ (КОНЕЧНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

Хаметов В.М., Шелемех Е.А.†

НИУ ВШЭ (Россия, Москва), †ЦЭМИ РАН (Россия, Москва)

E-mail: khametovvm@mail.ru, letis@mail.ru

1. В докладе установлен новый критерий существования экстремальных дискретных вероятностных мер в конечномерном случае, из которого следует, в частности, утверждение теоремы Шоке [1].

2. Пусть $(E,\mathcal{E})$ — измеримое пространство, $M(E)$ — множество вероятностных мер на $(E,\mathcal{E})$, а $f: E \to \mathbb{R}^+$ — любая $\mathcal{E}$-измеримая ограниченная функция. Обозначим: 1) $\operatorname{extr} A$ — множество крайних точек множества A; 2) $\operatorname{supp}\mu$ — носитель меры μ; 3) $I^{\mu} \triangleq \operatorname{card}\operatorname{supp}\mu$, $\mu \in M(E)$.

Определение. Вероятностную меру μ^* на $(E,\mathcal{E})$ будем называть экстремальной относительно множества вероятностных мер $\mathfrak{R} \subseteq M(E)$, если для любой $\mathcal{E}$-измеримой ограниченной функции $f: E \to \mathbb{R}^+$ справедливо равенство $\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{R}} \int\limits_E f(x)\mu(dx) = \int\limits_E f(x)\mu^*(dx)$.

Теорема 1. *Экстремальная относительно множества $\mathfrak{R} \subseteq M(E)$ вероятностная мера μ^* существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ — слабо относительно компактное множество.*

3. Пусть $\mathfrak{R} \subseteq M(E)$ такое, что $\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{R}} \int\limits_E |x|\mu(dx) < \infty$. Известно [2], что в этом случае $\mathfrak{R}$ — слабо относительно компактное множество. Следовательно, существует экстремальная относительно множества $\mathfrak{R}$ вероятностная мера μ^* и конечен интеграл Лебега $m^* \triangleq \int\limits_E x\mu^*(dx)$.

Пусть $D \triangleq \left\{\gamma \in \mathbb{R}^d : \int\limits_E \exp\left\{f(x) - (\gamma, x - m^*)\right\}\mu^*(dx) < \infty\right\}$. Очевидно, что $D \neq \varnothing$.

Следующая теорема – критерий дискретности экстремальных мер в конечномерном случае [3].

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^d$ — неограниченное открытое множество, $d < \infty$. Экстремальная относительно множества $\mathfrak{R}$ вероятностная мера μ^* дискретна тогда и только тогда, когда существует $\gamma^* \in D$ такой, что $\int\limits_E e^{f(x)-(\gamma^*,x-m^*)}\mu^*(dx) \leq \int\limits_E e^{f(x)-(\gamma,x-m^*)}\mu^*(dx)$, где γ — любой из D, причем $I^{\mu^*} \leq d+1$.

2) Пусть E — d-мерный компакт, $d < \infty$. Тогда существует дискретная вероятностная мера $\mu^* \in M(E)$, $I^{\mu^*} \leq d+1$, такая, что $\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{R}} \int\limits_E f(x)\mu(dx) = \int\limits_E f(x)\mu^*(dx) = \sum\limits_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i f(x_i)$, где $x_i^* \in \operatorname{extr} E$, $1 \leq i \leq I^{\mu^*}$, причем $c_i^* \triangleq \mu^*(\{x_i\}) > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i^* x_i = m^*$, $\sum\limits_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i^* = 1$.

4. Из пункта 2 теоремы 2 следует утверждение теоремы Шоке. Пусть $\mu \in M(E)$, $m \triangleq \int\limits_E x\mu(dx)$ принадлежит относительной внутренности $\operatorname{supp}\mu$ ($\operatorname{ri}\operatorname{int}\operatorname{supp}\mu$). Через $\mathfrak{R}(m)$ обозначим множество вероятностных мер μ на $(E,\mathcal{E})$ таких, что $m \in \operatorname{ri}\operatorname{int}\operatorname{supp}\mu$.

Следствие. *Пусть выполнены условия пункта 2 теоремы 2 и $\mu \in \mathfrak{R}(m)$ ($\mathfrak{R}(m) \neq \varnothing$). Тогда для любой аффинной функции $f: E \to \mathbb{R}^1$ существует единственная экстремальная относительно $\mathfrak{R}(m)$ дискретная мера $\mu^* \in \mathfrak{R}(m)$, носитель которой сосредоточен не более чем в $d+1$ точке из $\operatorname{extr} E$, причем $f(m) = \int\limits_E f(x)\mu^*(dx)$.*

Доказательство следствия вытекает из утверждения пункта 2 теоремы 2 в силу того, что: 1) E — компактно; 2) $\mathfrak{R}(m)$ — относительно слабо компактно; 3) для любой $\mu \in \mathfrak{R}(m)$ верно, что $m \in \operatorname{ri}\operatorname{int}\operatorname{supp}\mu$.

Список литературы

[1] Фелпс Р. *Лекции о теоремах Шоке.* М.: Мир, 1968.

[2] Ширяев А.Н. *Вероятность-1.* М.: МЦНМО, 2004.

[3] Васильев Г. А., Хаметов В. М., Шелемех Е. А. *Об условиях дискретности экстремальных вероятностных мер (конечномерный случай)*, Матем. заметки, т. 94, вып. 6 (2013), с. 944-948.

Содержание

Оргкомитет КРОМШ-2015

Председатель Оргкомитета:

Копачевский Николай Дмитриевич — заведующий кафедрой математического анализа Таврической академии КФУ, доктор физ.-мат. наук, профессор, e-mail: kopachevsky@list.ru

Заместители председателя:

Муратов Мустафа Абдурешитович — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математического анализа ТНУ, e-mail: mustafa_muratov@mail.ru

Шкаликов Андрей Андреевич — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа МГУ, e-mail: ashkaliko@yandex.ru

Члены оргкомитета:

Войтицкий Виктор Иванович — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа Таврической академии КФУ, e-mail: voytitsky.kromsh@gmail.com

Марянин Борис Давидович — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа Таврической академии КФУ, e-mail: marjaninbd@mail.ru

Пашкова Юлия Сергеевна — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа Таврической академии КФУ, e-mail: pashkova.kromsh@gmail.com

Ситшаева Зера Зекерьяевна — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математики КИПУ, e-mail: sitshayeva.kromsh@gmail.com

Старков Павел Александрович — заместитель декана факультета математики и информатики Таврической академии КФУ, кандидат физ.-мат. наук, доцент, e-mail: starkov.kromsh@gmail.com

Старкова Ольга Сергеевна — ведущий специалист кафедры математического анализа Таврической академии КФУ, e-mail: starkova.kromsh@gmail.com

Формат 60x84 /8. Усл. печат. лист. 14,41. Заказ № 005/0624. Тираж 200 экз.

Издательство ООО "ДИАЙПИ"
г. Симферополь, пр. Кирова, 17 тел./факс +7(3652) 248-178, +7(978)776-56-76.
dip@diprint.com.ua, www.diprint.com.ua
Отпечатано в ИП Куртбединова Д.А.
297573, Республика Крым, Симферопольский р-н.,
с. Фонтаны, ул. Юксеклик, 5.